中學數學挑戰徵答題

通訊解題發掘數學資優生研究小組

♠本期徵答截止日期：民國 86 年 4 月 7 日；相關參考解答將刊於科學教育月刊第 200 期

問題編號 1026

試確定是否存在正整數 n ，使得1996^n-1整除1997^n-1。

問題編號 1027

對任意正整數 n，定義函數 $S(n)$ 表示滿足方程式 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ 的正整數 x ， y 數對 (x,y) 的組數。例如 $S(2)=3$ ， $S(9)=5$ 。
試求所有使 $S(n)=1997$ 的正整數 n 。

問題編號 1028

試確定所有的正整數 m 、 n ，使得 $\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{m}}+\left(\frac{1}{m+1}\right)^{\frac{1}{n}}>1$ 。

問題編號 1029

設 $x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n$ 是從 -2 ， -1 ，0， 1 這四個整數內取值的數列，且滿足下列三個條件：

(i) $\sum_{j=1}^{n} x_j=-16$，

(ii) $\sum_{j=1}^{n} x_j^{\,2}=48$，

(iii) $\sum_{j=1}^{n} x_j^{\,3}=-70$，試求 $\sum_{j=1}^{n} x_j^{\,5}$ 之值。

問題編號 1030

求滿足下列兩條件的所有多項式 $P(x)$ ：

(i) $P(0)=0$ 。

(ii) 對任意實數 x ，等式 $P(x^3+1)=(P(x))^3+1$ 恆成立。

注：本次徵答題有些題目可利用二項式定理展開（巴斯卡定理）來求解。