中學數學挑戰徵答題參考解答評析

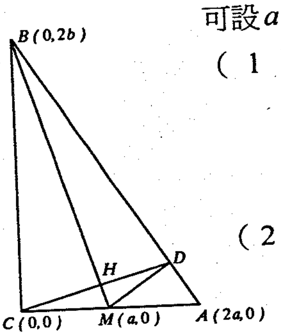
通訊解題發掘數學資優生研究小組

問題編號 1006

設 M 爲直角三角形 ABC 的一股$\overline{CA}$的中點，$\angle C$ 爲直角。自 C 引中線$\overline{BM}$的垂線交斜邊$\overline{AB}$於 D，且$\angle AMD<90^\circ$。試求使$\angle AMD\ge\angle BMC$的充要條件（以$\overline{AC}$、$\overline{BC}$兩邊長的關係表之）。

《解答》：解法(一)：

以 C 爲原點，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$爲 X 軸與 Y 軸，建立坐標系（如左圖），以解析的方式來處理這個問題。設 A，B，C 三點的坐標分別爲 A（$2a$,0），B（0,$2b$），C（0,0），則 M 的坐標爲（a,0），可設a，b均爲正數。



（1） D 點爲$\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{CH}$的交點，其中$\overleftrightarrow{CH}$爲$\overline{BM}$的垂線，所以$\overleftrightarrow{DM}$可以用$\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{CH}$的直線系表示。直線$\overleftrightarrow{AB}$的方程式，由截距式得$\dfrac{x}{2a}+\dfrac{y}{2b}=1$，即$bx+ay=2ab$。

（2）直線$\overleftrightarrow{BM}$的方程式，由截距式可得$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{2b}=1$，即$2bx+ay=2ab$，其斜率$m_1=\dfrac{-2b}{a}$。

（3）直線$\overleftrightarrow{CH}$過（0,0），又垂直$\overline{BM}$，所以，$\overleftrightarrow{CH}$的方程式爲$ax-2by=0$。

（4）由（2），（3）及（1）的關係，我們可令直線$\overleftrightarrow{MD}$的方程式爲$(bx+ay-2ab)+t(ax-2by)=0$，但 M （a,0）在此線上，所以$(ab-2ab)+t(a^2)=0$，即$t=\dfrac{b}{a}$。因此，直線$\overleftrightarrow{MD}$的方程式爲$(bx+ay-2ab)+\dfrac{b}{a}(ax-2by)=0$，即$2bx-\dfrac{2b^2-a^2}{a}y=2ab$，其斜率$m_2=\dfrac{2ab}{2b^2-a^2}$。

（5）由斜率與對稱的關係，我們知道，當∠AMD<90°時，$m_2>0$，且$m_2\ge -m_1$，此時有下列關係$\begin{cases}2b^2-a^2>0\\ \dfrac{2ab}{2b^2-a^2}\ge\dfrac{2b}{a}\end{cases}$，

由此可得$a<\sqrt{2}b$且$a\ge b$，所以當$b\le a<\sqrt{2}b$時，$\angle BMC\le\angle AMD<90^\circ$，反之亦成立。因此，∠AMD<90°時，$\angle AMD\ge\angle BMC$的充要條件爲$\overline{BC}\le\overline{AC}<\sqrt{2}\ \overline{BC}$。特別地在$\overline{BC}=\overline{AC}$時，∠AMD=∠BMC。即ΔABC爲

等腰直角三角形時，∠AMD=∠BMC 。

解法(二)：（採自雄中王紹宇、姜宜榮，南一中梁東尼等之解法。）

觀察知：$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$愈小，則∠ABD 漸減，∠BMC 漸增，故欲使$\angle AMD \geq \angle BMC$，則合乎此條件之三角形$\overline{AC}$比$\overline{BC}$之比值要小於$\angle AMD = 90°$時$\overline{AC}$及$\overline{BC}$之比不小於$\angle AMD = \angle BMC$時$\overline{AC}$及$\overline{BC}$之比。

（1）$\angle AMD = 90°$時，因爲$\overline{MD}$平行$\overline{BC}$，且 M 爲$\overline{AC}$中點，所以 D 爲$\overline{AB}$之中點

$\Rightarrow \overline{BM}$與$\overline{CD}$之交點 G 爲ΔABC 之重心

$\therefore \overline{BG}:\overline{GM} = \overline{CG}:\overline{GD} = 2:1$

$\because \Delta MCB$爲直角三角形且$\overline{CG} \perp \overline{BM}$

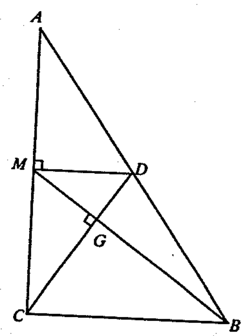
$\therefore \overline{CM}:\overline{MG} = \overline{CB}:\overline{CG}$……①

同理：$\overline{CG}:\overline{MG} = \overline{MG}:\overline{GD} \Rightarrow \overline{MG}^2 = \frac{1}{2}\overline{CG}^2$，

$\overline{CG} = \sqrt{2}\ \overline{MG}$………②

②代入①$\overline{CM}:\overline{MG} = \overline{CB}:\sqrt{2}\ \overline{MG} \Rightarrow \overline{CM}:\overline{BC} = 1:\sqrt{2}$

故$\overline{AC}:\overline{BC} = 2:\sqrt{2}$



（2）$\angle AMD = \angle BMC$時，過 D 作$\overline{DE} \perp \overline{AM}$於 E

$\Theta\ \angle AMD = \angle BMC$，$\therefore \Delta MED \sim \Delta DEC \sim \Delta MCB$

$\Rightarrow \overline{AE}:\overline{AC} = \overline{DE}:\overline{BC}$，即$(\overline{AM} - \overline{ME}):2\overline{AM} = \overline{DE}:\overline{BC}$

$2\overline{AM} \cdot \overline{DE} = \overline{BC}(\overline{AM} - \overline{ME})$……….①

又$\overline{EM}:\overline{DE} = \overline{MC}:\overline{BC} \Rightarrow \overline{DE} \cdot \overline{MC} = \overline{EM} \cdot \overline{BC}$………②

②代入①$2\overline{AM} \cdot \overline{DE} = \overline{AM} \cdot \overline{BC} - \overline{DE} \cdot \overline{MC}$，$(\overline{AM} = \overline{MC})$

$\Rightarrow 2\overline{DE} = \overline{BC} - \overline{DE}, \overline{BC} = 3\overline{DE}$

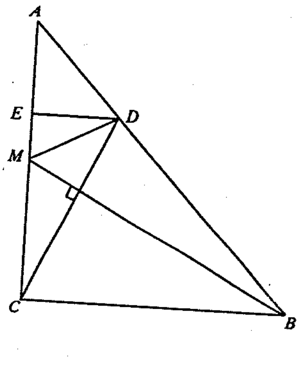
又$\overline{BC}:\overline{MC} = \overline{DE}:\overline{ME} \Rightarrow \overline{ME}:\overline{MC} = 1:2$

$\Rightarrow \overline{AE}:\overline{EM} = 1:1$，$\overline{DE}^2 = \overline{CM} \cdot \overline{AE}$，$\overline{DE} = \overline{AE} = \overline{AM}$

$\Rightarrow \overline{AC}:\overline{BC} = \overline{AE}:\overline{DE} = 1:1$

由（1）（2）知，當$1 \leq \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} < \sqrt{2}$時

$\angle AMD \geq \angle BMC$且∠AMD<90°。



《解題重點》

1. 以$\overrightarrow{CA}$爲 X 軸便以比較傾角，優於以$\overrightarrow{CB}$爲軸。
2. 本命題用純幾何的方法來證明或找$\angle AMD \geq \angle BMC$的條件時，不容易找到解題的關鍵，所以採用坐標解析的方法來處理。凡是僅與直線有關的幾何問題，且涉及的角度或距離都不多時，則用解析幾何來解往往顯得便捷。

3. 利用$\angle C$爲直角的條件，建立坐標系，能使坐標選取得到最簡單的關係，且不失一般性。
4. 利用直線系（即直線族）求通過兩線交點的直線可以避免求交點的麻煩運算。
5. 利用傾斜角與斜率的關係比較角度的大小也是解題的關鍵。
6. 如附件。

《評析》

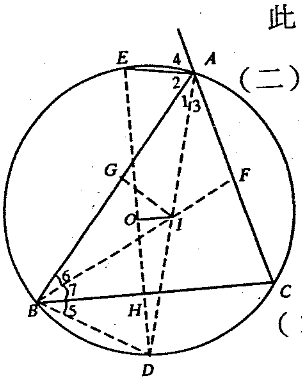
1. 本題爲初學解析幾何的好題材，參與本題徵答的學生數較多，惟高一的學生徵答比例過於偏低，計有北一女<u>吳培甄</u>（解析法），及雄中<u>王紹宇</u>、<u>姜宜榮</u>，南一中<u>梁東尼</u>（用純幾何法）等 43 位作答，得分率尚佳，部分書寫欠完整嚴謹，而被扣分。
2. 部分學生對"充要條件"的涵義不甚了解，僅證" $p \Rightarrow q$ "的方向。

問題編號 1007

設ΔABC 的三邊 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{CA}$ 成等差數列， O 與 I 分別爲ΔABC 的外心與內心。設$\angle BAC$的外角平分線交ΔABC 的外接圓於 E 。試證 $\overline{OI}$ 平行 $\overline{AE}$ 且其長等於 $\overline{AE}$ 之半。

《解答》：

（一）如果ΔABC 爲正三角形，則外心 O 與內心 I 重合，且$\angle BAC$的外角平分線爲圓 O（外接圓）的切線。所以$\angle BAC$的外角平分線與圓 O 恰交一點 A ，因此 E 與 A 重合，$\overline{OI} \mathrel{\underline{\underline{//}}} \frac{1}{2}\overline{AE}$ 也成立。



（二）如果ΔABC 不是正三角形時，我們來證明本命題：

（1）連接$\overline{AI}$並延長交圓於 D（如圖），再連接$\overline{DE}$，則$\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4$，$\therefore \angle EAD=\angle 1+\angle 2=90^\circ$，因此$\overline{DE}$爲圓 O 的直徑，必過圓心 O ，且 D 爲$\overset{\frown}{BC}$的中點，所以 $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ ，令垂足爲 H ， H 必爲 $\overline{BC}$ 的中點，即 $\overline{HB}=\overline{HC}=\frac{1}{2}\overline{BC}$ 。

（2）連接$\overline{BI}$，並過 I 作$\overline{AB}$，$\overline{AC}$兩邊的垂線$\overline{IG}$與$\overline{IF}$，其中 G,F 爲兩垂足，則$\overline{AG}=\overline{AF}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC})$，但因爲$\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{CA}$成等差數列，所以$\overline{AB}+\overline{AC}=2\overline{BC}$,即可知

$\overline{AG}=\overline{AF}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\overline{BH}$ 。

（3）連接$\overline{BD}$，$\angle 5=\angle 1=\frac{1}{2}\angle BAC$ ，$\angle BHD=\angle AGI=90^\circ$，

所以 $\Delta BHD \cong \Delta AGI$ （ ASA 性質），因此$\overline{AI}=\overline{BD}$ 。

（4）$\angle BID=\angle 1+\angle 6$ ，又$\angle 6=\angle 7$ ，且$\angle IBD=\angle 5+\angle 7$ ，所以$\angle BID=\angle IBD$ ，得$\overline{BD}=\overline{ID}$ ，因此$\overline{AI}=\overline{ID}$ ，即 I 爲$\overline{AD}$的中點。

（5）在ΔDAE中，I,O分別爲$\overline{AD}$與$\overline{ED}$的中點，所以$\overline{OI}\mathrel{\underline{\underline{//}}}\frac{1}{2}\overline{AE}$（三角形中位線性質）。

《解題重點》

1.本命題與（1006）題恰好相反，用解析法不容易處理外心與內心與各頂點的關係，因此，用傳統的純幾何法證之。

2.正三角形的情況，重心與內心重合，所以先作說明。

3.∠EAI爲直角，因此延長$\overline{AI}$交圓於D，就可推導$\overline{DE}$爲一直徑，且必經過圓心，就是證明關鍵所在，至此要證明$\overline{OI}\mathrel{\underline{\underline{//}}}\frac{1}{2}\overline{AE}$，就必須朝I爲$\overline{AD}$的中點的方向來尋找關係。

$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$爲等差數列，則$\overline{AB}+\overline{AC}=2\overline{BC}$，可導致$\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC}=\overline{BC}=2\overline{BH}$，即$\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC})=\overline{BH}$。

I爲ΔABC的內心，因此ΔABC的內切圓過A的切線段長恰爲$\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC})=\overline{AG}$，可得$\overline{AG}=\overline{BH}$，導致$\Delta BHD\cong\Delta AGI$與$\overline{AI}=\overline{BD}$，也是證明的另一關鍵。

4.ΔDBI中，$\overline{BD}=\overline{DI}$可導出I爲弦$\overline{AD}$的中點。

5.最後由三角形中位線的性質使命題得證。

《評析》

1.本題參與徵答者較少，顯示中學生純幾何仍爲較弱之一環，計有雄中<u>盧佑群</u>，中一中<u>林宗茂</u>等33位參與徵答，惟參與者之答對率最高，幾乎都得滿分（7分）。

2.部分學生用內分角線性質求解，簡化計算，增進解題品質。

3.部分學生解析、三角並用，計算較複雜，答題品質較不理想。

問題編號 1008

（1）設a,b都是大於1的實數，試確定$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}$的最小值。

（2）設$a_1,a_2,a_3,\ldots\ldots,a_n$爲$n$個均大於1的實數，$n\geq 2$。

試確定$\frac{a_1^{\,2}}{a_2-1}+\frac{a_2^{\,2}}{a_3-1}+\frac{a_3^{\,2}}{a_4-1}+\cdots\cdots+\frac{a_{n-1}^{\,2}}{a_n-1}+\frac{a_n^{\,2}}{a_1-1}$的最小值。

《解答》：（1）①首先從簡單的特例（a,b）=（2,2），（2,3），（$\frac{3}{2}$,2），（3,4）來找$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}$之值，分別得到 $8,11,\frac{41}{4},\frac{59}{6}$的結果，因此猜測當$a=2$，$b=2$時，$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}=8$可能是最小值。

②由算幾不等式，可得當$a>1$，且 b>1 時

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b-1}\cdot\frac{b^2}{a-1}}=2(\frac{a}{\sqrt{a-1}})(\frac{b}{\sqrt{b-1}})\cdots\cdots\ (*)$$

又，任一正實數x，因爲$x^2-4x+4=(x-2)^2\geq 0$，所以

$x^2\geq 4(x-1)$，即得$x\geq 2\sqrt{x-1}$，也就是$\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}\geq 2$恆成立。且僅當

$x=2$時等號成立，所以（＊）式可得

$\dfrac{a^2}{b-1}+\dfrac{b^2}{a-1}\geq 2\cdot 2\cdot 2=8$，而且僅當$a=b=2$時，

$\dfrac{a^2}{b-1}+\dfrac{b^2}{a-1}=8$爲最小值。

（2）①當$a_1,a_2,a_3,\ldots\ldots,a_n$均爲大於 1 的實數，$n\geq 2$時，由（1）之②可知，

$\dfrac{a_k}{\sqrt{a_k-1}}\geq 2$，$\forall k=1,2,3,\ldots\ldots,n$，且僅當

$a_1=a_2=\ldots\ldots=a_n=2$時，$\dfrac{a_k}{\sqrt{a_k-1}}=2$爲最小。

②由算幾不等式，可得

$$\frac{a_1^{\,2}}{a_2-1}+\frac{a_2^{\,2}}{a_3-1}+\frac{a_3^{\,2}}{a_4-1}+\cdots\cdots+\frac{a_{n-1}^{\,2}}{a_n-1}+\frac{a_n^{\,2}}{a_1-1}$$

$$\geq n\sqrt[n]{\frac{a_1^{\,2}}{a_2-1}\cdot\frac{a_2^{\,2}}{a_3-1}\cdot\frac{a_3^{\,2}}{a_4-1}\cdots\cdots\frac{a_n^{\,2}}{a_1-1}}$$

$$=n\sqrt[n]{(\frac{a_1}{\sqrt{a_1-1}}\cdot\frac{a_2}{\sqrt{a_2-1}}\cdots\cdots\frac{a_n}{\sqrt{a_n-1}})^2}$$

$$\geq n\sqrt[n]{(2^n)^2}=n\cdot 4=4n$$

且僅當$a_1=a_2=\ldots\ldots=a_n=2$時，左式之值最小，其最小值爲$4n$。

《解題重點》

1.由特例（取a,b爲較小的整數）觀察，並猜測所欲找的最小值。

2.由算幾不等式找$\dfrac{a^2}{b-1}+\dfrac{b^2}{a-1}\geq 2\sqrt{\dfrac{a^2}{b-1}\cdot\dfrac{b^2}{a-1}}$的關係。

3.解決$\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$之最小值，由$x^2\geq 4(x-1)$的關係可得$\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}\geq 2$。

4.由一般的算幾不等式推廣（1）的不等式，得到$n\geq 2$時的一般化的結果。

5.根式運算的技巧。

《評析》

1.本題徵答學生數最多，計有嘉中蘇冠武，武陵鐘招宏等 46 位，得分率亦高。

2.本題部分高二以上學生兼用排序不等式或柯西不等式求解，顯示台灣中學生不等式兼具不同的解題技巧，應屬優異。

3.部分學生遺漏"等號成立條件"之答案，應注意題目整體的作答的要求。

問題編號 1009

設數列 $a_1,a_2,a_3,\ldots\ldots,a_n,\ldots\ldots$，依下列規則定義：$a_1=a_2=2$，且 $a_n=\dfrac{a_{n-1}^2+4}{a_{n-2}}$，$n\geq 3$。試證：此數列的每一項 a_n 都是偶數。

《解答》：解法(一)：

（一）首先由數列的定義找此數列的前幾項來觀察此數列的特性，可得下列各項：

$a_1=2,a_2=2,a_3=4,a_4=10,a_5=26,a_6=68$

（二）由 $a_n=\dfrac{a_{n-1}^2+4}{a_{n-2}}$ 的遞迴關係，我們猜測 $a_n=Aa_{n-1}+Ba_{n-2}$，$n\geq 3$，再由

$\begin{cases}a_3=Aa_2+Ba_1\\a_4=Aa_3+Ba_2\end{cases}$，得 $\begin{cases}4=2A+2B\\10=4A+2B\end{cases}$，得 $A=3$，$B=-1$

又當 $a_n=3a_{n-1}-a_{n-2}$ 時，$a_5=3a_4-a_3=26$，

$a_6=3a_5-a_4=68$，與（一）的各項相吻合，因此這猜測 $a_n=3a_{n-1}-a_{n-2}$，可能成立。

（三）由數學歸納法，我們來證明：$a_1=a_2=2$，$a_n=3a_{n-1}-a_{n-2}$，$n\geq 3$，滿足 $a_n=\dfrac{a_{n-1}^2+4}{a_{n-2}}$，$n\geq 3$ 的條件。

（1）當 $n=3$ 時顯然成立（由（一）（二）可知）。

（2）假設 $n=k\geq 3$ 時，$a_k=3a_{k-1}-a_{k-2}$ 成立，則當 $n=k+1$ 時欲證

$a_{k+1}=\dfrac{a_k^2+4}{a_{k-1}}=3a_k-a_{k-1}$，也就是欲證

$a_k^2+4=a_{k+1}\cdot a_{k-1}=a_{k-1}(3a_k-a_{k-1})\cdots\cdots\cdots(*)$

因為 $a_k=3a_{k-1}-a_{k-2}\Rightarrow a_k^2+4=a_k(3a_{k-1}-a_{k-2})+4$

$=3a_ka_{k-1}-a_ka_{k-2}+4\cdots\cdots\cdots$①

又 $a_k=\dfrac{a_{k-1}^2+4}{a_{k-2}}\Rightarrow a_{k-1}^2+4=a_ka_{k-2}\cdots\cdots\cdots$②

將②代入①得 $a_k^2+4=3a_ka_{k-1}-a_{k-1}^2=a_{k-1}(3a_k-a_{k-1})$ 即（$*$）式成立。

也就當 $n=k+1$ 時，$a_n=3a_{n-1}-a_{n-2}$ 也成立。

由數學歸納法顯然可得 $a_1=a_2=2$，且 $a_n=3a_{n-1}-a_{n-2}$，$n\geq 3$ 時，任意 a_n 均為偶數，本命題即得證。

解法(二)：（採自嘉義高中蘇泓洸之解答）

依題意可知：

$$\begin{array}{llll}
a_1=2 & & & \\
a_2=2 & & & \\
 & 2 & & \\
a_3=4 & & 4 & \\
 & 6 & & \\
a_4=10 & & 10 & \\
 & 16 & & \\
a_5=26 & & 26 & \\
 & 42 & & \\
a_6=68 & & 68 & \\
 & 110 & & \\
a_7=178 & & &
\end{array}$$

由上列之討論猜測：

$(a_n-a_{n-1})-(a_{n-1}-a_{n-2})=a_{n-1}$

即 $a_n=3a_{n-1}-a_{n-2}$

以下利用數學歸納法證明，同解法(一)。

《解題重點》

1.由特例（即數列的定義找數列的前幾項）尋找或猜測數列一般項的通則（通常有等差、等比或遞迴的關係）。

2.由數學歸納法：數列的一般項的猜測的正確性。

3.欲證 $a_{k+1}=\dfrac{a_k^{\ 2}+4}{a_{k-1}}$ 且 $a_{k+1}=3a_k-a_{k-1}$ 時，利用 $a_k^{\ 2}+4=a_{k-1}(3a_k-a_{k-1})$ 的充要關係較易得之。

《評析》

1.本題參與徵答學生數亦多，計有建中鄧敦民、蘇漢強，嘉中蘇泓洸，雄中盧佑群等43位，得分率高。

2.本題爲這五題中，高一學生徵答比例最高的一題，可能是本題配合高一上學期數學第二章數學歸納法題材有關。

3.透過代數恆等運算直接推得 $a_{n+1}=3a_n-a_{n-1}$ 爲遞迴關係解題品質頗佳。

問題編號 1010

有一 8×8 小方格的棋盤。將此棋盤各小方格依序編號，其號碼分別以 1,2,......,64 記之。除編號 7 的小方格外，每一小方格各放一枚棋子，此時我們稱之爲初始狀態。接著我們對小方格上的棋子施行“操作”，每次“操作”是任意將棋盤上的一顆棋子移放在棋盤上的空格上，此種操作繼續作下去，直到空格的編號爲 7 時，操作停止。（這時，操作共進行了 L 次，$L\geq 2$）當操作停止時，設初始狀態在編號爲 k 的格子上的棋子，最後所在的格子的編號爲 L_k，其中 k=1,2,......,64，但 $k\neq 7$（這時候 k=7 的格子上沒有棋子）。

（1）試證：$\sum_{k=1,k\neq 7}^{64}|L_k-k|\le 1996$；

（2）找出等號成立的一種移法（即寫出棋子移動的方法）。

《解答》：（1）

①首先要確認一個事實：不論幾次"操作"之後，棋盤上的棋子所在的位置的格子的編號爲 1,2,3,………到 64 的重排（此處所謂號碼重排是指對初始狀態時，在編號爲 k 的棋子經過幾次操作後新的位置的編號而言），因此 $L_1,L_2,\Lambda\Lambda,L_{63},L_{64}$ 爲除了 7 以外的數 1,2,.....,64 等 63 個數的重排。

②欲證本命題 $\sum_{k=1,k\neq 7}^{64}|L_k-k|\le 1996$，必須證明：

$L_1,L_2,\Lambda\Lambda,L_{63},L_{64}$ 的所有排列滿足 $\sum_{k=1,k\neq 7}^{64}|L_k-k|$ 都不超過 1996。爲此我們證明 $\max(\sum_{k=1,k\neq 7}^{64}|L_k-k|)\le 1996$。因爲對任意 k 而言：

$$|L_k-k|=\begin{cases}L_k-k,\text{當}L_k\ge k\text{時}\\-(L_k-k),\text{當}L_k<k\text{時}\end{cases}$$，所以

$$\sum_{k=1,k\neq 7}^{64}|L_k-k|=\pm(L_1-1)\pm(L_2-2)\pm\cdots\pm(L_6-6)\pm(L_8-8)\pm(L_9-9)$$
$$\pm\cdots\pm(L_{64}-64)\cdots\cdots\cdots\quad(*)$$

在（＊）式的右式，各括號前的 ± 號的"+"與"−"是唯一的，且視 $L_k\ge k$ 或 $L_k<k$ 的情況而定。

（＊）式的右式是由 63 個"+"，63 個"−"與 1,2,3,4,5,6,8,9,……,63,64 各二個數所組成的代數式；因此要使它的值最大時，必須讓這 126 個數中，較大的 63 個數，（即 64,64,63,……,34,34,33）是用"+"連接，而另外較小的 63 個數，即（33,32,32,…….,8,8,6,6,5,…,2,1,1）是用"−"連接寫成的代數式的值。

仔細觀察與檢驗，我們可以得到下面的重排關係，（第一列爲初始狀態格子的編號，第二列爲操作 L 次之後初始狀態時編號爲 k 的棋子的編號，即 L_k）

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & 6 & 8 & 9 & \cdots & 33 & 34 & 35 & \cdots & 39 & 40 & 41 & \cdots & 64\\ 33 & 34 & \cdots & 38 & 39 & 40 & \cdots & 64 & 1 & 2 & \cdots & 6 & 8 & 9 & \cdots & 32\end{pmatrix}$$

從這個重排的對應我們可以整理（＊）式的右式各項，並調整得到下面的結果。

(**)當 $\sum_{k=1,k\neq 7}^{64}|L_k-k|=(64+63+\cdots\cdots+34+33)+(64+63+\cdots\cdots\cdots+35+34)$

$-(1+2+3+\cdots\cdots+6+8+9+\cdots\cdots+31+32)$

$-(1+2+3+\cdots\cdots+6+8+9+\cdots\cdots+32+33)$

$=2\sum_{k=34}^{64}k+33-2\sum_{k=1}^{32}k-33+2\times 7$

=3038+33−1056−33+14=1996 時

(**)式的結果為 $\max(\sum_{k=1,k\neq 7}^{64}|L_k-k|)$

因此，不論"操作"多少次後， $\sum_{k=1,k\neq 7}^{64}|L_k-k|\le 1996$ 恆成立。

（2）接著我們舉出"操作"L 次以後，使 $\sum_{k=1,k\neq 7}^{64}|L_k-k|=1996$ 的操作方式：我們以"$b\leftarrow a$"的符號表示棋子由"編號 a"的位置移到"編號 b"的位置的一次操作。

以下一序列操作的合成：

7←1←33←64←32←63←31←…………←35←2←34←7

（參照（2）的重排關係），先將編號為 1 的格子上的棋子移到編號 7 的空格上，再將編號 33 的格子上的棋子移至編號 1 的空格上，再移 64 到 33，…………，由編號 34 的格子上的棋子移到編號 2 的空格上，最後，再將編號為 7 的格子上的棋子，移到編號 34 的格子上，使編號為 7 的格子最後是空格。

此時，共操作了 L 次移動，且 $\sum_{k=1,k\neq 7}^{64}|L_k-k|=1996$。

《解題重點》

1.數字重排的概念。

2.了解題意。

3.絕對值概念：$\begin{cases}|x|=x,\text{當}x\ge 0\\|x|=-x,\text{當}x<0\end{cases}$，x 為實數。

為使 $\sum_{k=1,k\neq 7}^{64}|L_k-k|$ 有最大值，所以 63 項的 L_k-k 中，儘可能使 64,64,63,63,………,8,8,6,6,5,5,……,2,2,1,1 等 126 個數的"和""差"中，越大的數取"+"號，越小的數取"−"號。即使 64,64,63,63,……,34,34,33，各數為"+"號，33,32,32,……,8,8,6,6,5,5,……,2,2,1,1 各數為"−"號。

4.舉出確實的重排法則。

《評析》

1.本題參與徵答人數最少，計有建中李國禎，長榮中學蔡孟哲等 29 位，得分率在五題中最低。

2.本題雖然所需數學知識背景較簡淺，但其思考結構性較高，加上部分徵答者不很了解題意，產生解答上的偏差。

3.本題屬離散數學，沒有常規的作法，部分徵答者遺漏了操作的實例。

《總評》

1.本次徵答統計簡表如下：

總人數 65 人	問題編號	1006	1007	1008	1009	1010
	得分	240	219	285	243	152
	得分率	0.82	0.98	0.89	0.81	0.78
一年級 37 人	得分	100	77	121	115	74
	得分率	0.75	1.00	0.82	0.75	0.70
二年級 17 人	得分	77	72	87	69	34
	得分率	0.85	0.94	0.89	0.82	0.81
三年級 11 人	得分	56	70	77	59	39
	得分率	0.80	1.00	1.00	0.94	0.80
參與徵答總校數： 13 所 計：　計畫內： 9 所 非計畫內： 4 所						

2.　本期五題（問題編號 1006-1010 ）的難度比上期（ 1001-1005 ）高出很多，是造成此次徵答學生數大幅減少的主因之一。

3.本期答題截止期限恰逢各校第二次段考及科展繳交時間，影響徵答頗大。

4.適當降低徵答題之難度並請教師鼓勵學生作答，應仍可達到增進徵答興趣進而提昇數學能力的目標。

5.本期答題成績優異的學生計有：

高一：嘉中蘇泓洸，雄中盧佑群共二位。

高二：台師大附中陳正傑、王世豪，及武陵莊家勛共二位。

高三：建中陳俊豪、余家偉、王昭仁、郭文雄，台師大附中吳孟樵，武陵鐘招宏，協同中學劉志遠及長榮中學蔡孟哲共八位。

5.學生作答之心得感言摘錄:

①其實，我感覺數學是一種很好玩的科目,但我總是不喜歡坐在桌子前寫考卷，那是一種十分壓迫的感覺，所以這個題目是在坐公車時一邊看外面，一邊想出來的，而那種想出來，靈感一閃的感覺很棒。總之我喜歡數學，但不是坐在考試卷前，咬著筆桿，趕著時間的那種數學。

畢竟數學是用來解決問題，不是用來考試；是需要思考，而不是一味地使用技巧的。（中興高中，陳世榮）

②問題編號 1009 應了解Π（乘積符號）的性質、數列的遞迴性及第二數學歸納法的應用。當做數學苦思不解時，突然靈光乍現，所有”結”便迎刃而解，這真是令人快樂不過的事啊!（嘉義高中，邱顯財）