數學科疑難問題討論

李恭晴
國立台灣師範大學數學系

國立台灣師範大學附屬高中高三學生吳孟樵君問：

設P_i爲第i個質數（例如，$P_1=2, P_2=3, P_3=5,.....$），則$2P_i>P_{i+1}$是否恆成立？

答：這個問題的答案是肯定的。爲了說明，我們先從Bertrand臆測說起。在1845年數學家Bertrand推測：對於每一個大於6的正整數n，一定存在一個質數P滿足$\frac{n}{2}<P\leq n-2$，不過當時他只證明在$6<n<6000000$時他的推測是正確的。一直到1850年蘇聯數學家*P.L.Tchebychef*才第一次完整的證明他的臆測正確無誤，今天，通常我們把Bertrand臆測寫成：

對於任意正整數n,，必存在一個質數P

滿足 $n<p\leq 2n$。

在Bertrand臆測中，令$n=P_i$，則必有一質數P滿足$P_i<P\leq 2P_i$。由於$P_{i+1}\leq P$，所以$P_i<P_{i+1}\leq 2P_i$。又因P_{i+1}是質數，上列等號不可能成立，所以$P_i<P_{i+1}<2P_i$。這就是這個問題的答案。

下面是Bertrand臆測的一個證明，提供參考。這個證明大致上是根據*Paul Erdös*（1932）的方法。首先我們證明兩個引理。

引理1：若$n>1$，$C_n^{2n}=\dfrac{(2n)!}{n!n!}$，則$C_n^{2n}>\dfrac{1}{2n}2^{2n}$

證明：利用數學歸納法即可證明，請自行證明。

引理2：設$\prod_{P\leq n}P$表示所有小於或等於n的質數P的乘積，則$\prod_{P\leq n}P<2^{2n}$

證明：利用數學歸納法。

(*i*) 當$n=1,2,3$時，上列不等式顯然成立。

(*ii*) 假設$n=1,2,....k$時上列不等式成立。我們將證明當$n=k+1$時也成立。

我們分兩種情形討論：

①若$k+1$爲偶數，則$k+1$不是質數，所以

$$\prod_{P\leq k+1}P=\prod_{P\leq k}P\leq 2^{2k}<2^{2(k+1)}$$

②若$k+1$爲奇數，則存在一個整數ℓ使$k+1=2\ell+1$

令$M=C_{\ell}^{2\ell+1}=C_{\ell+1}^{2\ell+1}=\dfrac{(2\ell+1)!}{\ell!(\ell+1)!}$，則因$(1+1)^{2\ell+1}$展開式中有

$C_{\ell}^{2\ell+1}$與$C_{\ell+1}^{2\ell+1}$兩項，所以$2M\leq 2^{2\ell+1}$，即$M\leq 2^{2\ell}$。另一方面，若

質數P滿足$\ell+2\leq P\leq 2\ell+1$，則P必爲M的質因數（因爲在$M=$

$\dfrac{(2\ell+1)!}{\ell!(\ell+1)!}$中分子有$P$而分母沒有），所以

$$\prod_{\ell+2\leq P\leq 2\ell+1} P\leq M$$

因此可得

$$\prod_{\ell+2\leq P\leq 2\ell+1} P\leq M\leq 2^{2\ell}$$

又由數學歸納法的假設知$\prod_{P\leq \ell+1} P\leq 2^{2(\ell+1)}$，所以

$$\prod_{P\leq k+1} P=\prod_{P\leq 2\ell+1} P=\prod_{P\leq \ell+1} P\cdot\prod_{\ell+2\leq P\leq 2\ell+1} P\leq 2^{2(\ell+1)}\cdot 2^{2\ell}$$

$$=2^{2(2\ell+1)}=2^{2(k+1)}$$

因此，當$n=k+1$時$\prod_{P\leq n} P\leq 2^{2n}$也成立。於是引理2得證。

現在證明*Bertrand*臆測：

令$N=C_n^{2n}=\dfrac{(2n)!}{n!n!}$，並將$N$寫成標準分解式$N=\prod_p P^{h_p}$，其中$h_p$是在$N$

的標準分解式中質數P的次方。

設$n\geq 5$，則$1<\sqrt{2n}<\dfrac{2n}{3}<n<2n$。我們注意到

(i)若$P>\sqrt{2n}$，則$h_p=[\dfrac{2n}{p}]-2[\dfrac{n}{p}]\leq 1$（〔α〕爲高斯最大整數符號）。

(ii)若$\dfrac{2n}{3}<P<n$，則$h_p=[\dfrac{2n}{n}]-2[\dfrac{n}{p}]=2-2=0$，所以$P$不是$N$的因數。

假設n與$2n$（含$2n$）之間沒有質數，則

$$N=\prod_{P\leq 2n} P^{h_p}=\prod_{P\leq n} P^{h_p}$$

$$=\prod_{P\leq\sqrt{2n}} P^{h_p}\cdot\prod_{\sqrt{2n}<p\leq\frac{2n}{3}} P^{h_p}\cdot\prod_{\frac{2n}{3}<p\leq n} P^{h_p}$$

$$= \prod_{P \le \sqrt{2n}} P^{h_p} \cdot \prod_{\sqrt{2n} \le P \le \frac{2n}{3}} P \cdot \prod_{\frac{2n}{3} < p \le n} P^0$$

又因$h_p = \sum_{k=1}^{\infty}\{[\frac{2n}{p^k}] - 2[\frac{n}{p^k}]\}$，且每一個大括號中的數皆等於0或1，所以$h_p$小於或等於使$p^k \le 2n$的最大$k$，故$p^{h_p} \le 2n$。因此上式

$$\le \prod_{P \le \sqrt{2n}} (2n) \cdot \prod_{p \le \frac{2n}{3}} P$$

$$\le (2n)^{\sqrt{2n}-1} \cdot 2^{\frac{2n}{3}}$$

由引理1得$\frac{1}{2n} \cdot 2^n \le (2n)^{\sqrt{2n}-1} \cdot 2^{\frac{4n}{3}}$

即 $2^{\frac{2n}{3}} \le (2n)^{\sqrt{2n}}$或$2^{\sqrt{2n}} \le (2n)^3$。

當$n \ge 512$時，上列不等式不成立。因此可知，若$n \ge 512$，則n與$2n$（含$2n$）之間必有一質數存在。

當$n < 512$時，我們注意到下列各數除了1之外都是質數，且每一質數都小於他前面那個質數的兩倍：

1, 2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 521。

對於任意一個$n < 512$，令P爲上列比n大的質數中最小的一個，且令q爲P前面的那個數（$n = 1$時$q = 1$，否則q爲質數）。則

$$q \le n < p \le 2q \le 2n$$

因此，若$n < 512$，則n與$2n$（含$2n$）之間也必有一質數存在。