中學數學挑戰徵答題

通訊解題發掘數學資優生研究小組

*♠本期徵答截止日期：民國 **86** 年 **2** 月 **12** 日；相關參考解答將刊於科學教育月刊第 **198** 期*

問題編號 1016

解方程式 $(\sum_{n=0}^{1991} x^n)\times(\sum_{n=0}^{1999} x^n)=(\sum_{n=0}^{1995} x^n)^2$。

問題編號 1017

任意三個不爲零的實數 a，b，c，證明：

$$\left(\frac{a^2}{b^2c^2}+\frac{b^2}{c^2a^2}+\frac{c^2}{a^2b^2}\right)^2\ge 3\left(\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}+\frac{1}{a^2b^2}\right)$$ 恒成立。

並求等號"="成立的充要條件。

問題編號 1018

若兩實數 α，β 滿足下列方程組：

$$\begin{cases}\alpha^3-6\alpha^2+13\alpha-2006=0\\ \beta^3+3\beta^2+4\beta+1998=0\end{cases}$$ 試確定 $\alpha+\beta$ 之值。

問題編號 1019

設多項式函數 $f_1(x)=(x-2)^2$，$f_{k+1}(x)=(f_k(x)-2)^2$，$k=1,2,3,\ldots\ldots$ 令 $f_n(x)$ 展開式中，x 一次項的係數爲 b_n，二次項的係數爲 c_n。

試求 b_n，c_n（n 爲任意正整數）。（以 n 表示 b_n，c_n）。

問題編號 1020

在凸四邊形ABCD中，K,M分別爲兩邊 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 內的點，但都不是端點。$\overline{AM}$ 與 $\overline{KD}$ 的交點爲 L，$\overline{KC}$ 與 $\overline{BM}$ 之交點爲 N，已知：$\frac{\overline{AK}}{\overline{KB}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{MD}}=t$，$S_1,S_2$ 分別表示ΔAMB、ΔCKD，而 S_3,S_4 及 S 分別表示四邊形 AKMD、四邊形 KBCM 及四邊形 ABCD 的面積。

（1） 試證：四邊形 KLMN 的面積 $S_{KLMN}=\frac{t}{(t+1)^2}\frac{S_1S_2}{S_3S_4}S$。

（2） 當 K、M 分別爲 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 的中點時，試確定 $3S_{KLMN}$ 與 S 的大小關係。

*注：（**1**）從上期開始，本徵答題及相關中學數理疑難問題解答之傳眞及答錄號碼爲（**02**）**9306547**，請多利用。(此爲傳眞及答錄兩用號碼，若您要傳眞，請直接按傳送鍵；若您要留言，則請在嗶聲後開始留言)。*