幾何證明題二則

余進發
台南市立文賢國民中學

壹、前言

在國民中學選修數學習作下册，第一章總習題第4、5題依次爲：

如圖1，$\overline{AD}$爲△ABC中∠ABC中∠A的平分線，試證$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}$。

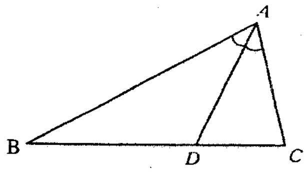

圖1

如圖2，∠EAC爲△ABC之一外角，$\overline{AD}$平分∠EAC,試證$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}$。這兩則幾何證明題,就是〞三角形內、外角平分線性質定理〞。

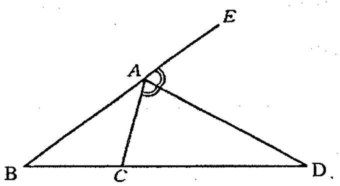

圖2

我們不難發現，“三角形內、外角平分線性質定理”簡直就是一對孿生兄弟。不管在內容的敘述上，還是在結論的書寫上，都是大同小異，如出一轍。

本文謹就這兩個定理，提出多達十四種的證法。以供各位先進，作爲教學上的參考。

貳、本文

一、第1種證法

㈠如圖3，作$\overline{CF}\parallel\overline{AD}$，交$\overleftrightarrow{AB}$於F。

$\therefore \overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AF}$，

且∠2=∠3，∠1=∠4。

但∠1=∠2，

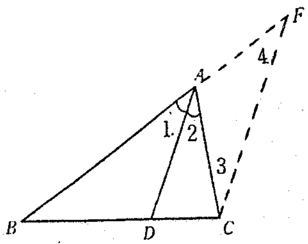

圖3

$\therefore \angle 3 = \angle 4$，
則 $\overline{AC} = \overline{AF}$。
故 $\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC}$。
㈡如圖4，證明過程與㈠同。

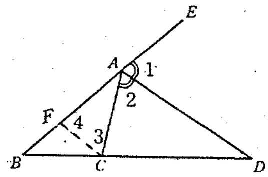
圖4

二、第2種證法
㈠如圖5。
㈡如圖6。
二者的證明過程，皆與“第1種證法”相同。

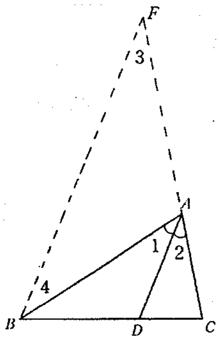
圖5

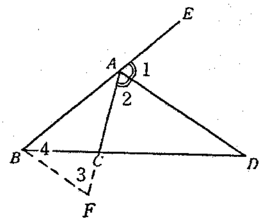
圖6

三、第3種證法
㈠如圖7，作 $\overline{DF} \parallel \overline{AC}$，交 $\overline{AB}$ 於F。
$\therefore \overline{BD} : \overline{DC} = \overline{BF} : \overline{FA}$ ……………………………………(1)
$\angle 2 = \angle 3$，
且△BDF～△BCA(AA相似)
則 $\overline{BF} : \overline{DF} = \overline{AB} : \overline{AC}$ ……………………………………(2)
又 $\angle 1 = \angle 2$，
$\therefore \angle 1 = \angle 3$，
則 $\overline{FA} = \overline{DF}$ ……………………………………………(3)
由(1)、(2)、(3)
故 $\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC}$。
㈡如圖8，證明過程與㈠同。

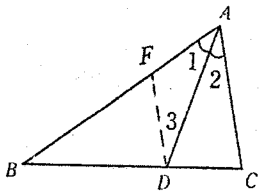
圖7

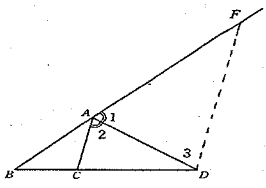
圖8

四、第4種證法
㈠如圖9。
㈡如圖10。
二者的證明過程，皆與“第3種證法”雷同。

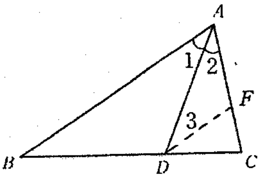
圖9

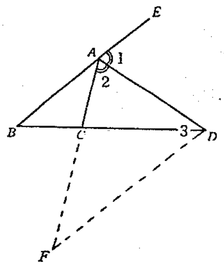
圖10

五、第5種證法

㈠如圖11，作$\overline{BF} /\!/ \overline{AC}$，交$\overleftrightarrow{AD}$於F。

$\therefore \angle 2 = \angle F$，

且$\triangle ACD \sim \triangle FDB$(AA相似)

則$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{BF} : \overline{AC}$。

又$\angle 1 = \angle 2$，

$\therefore \angle 1 = \angle F$，

則$\overline{AB} = \overline{BF}$。

故$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC}$。

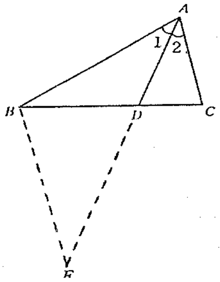

圖11

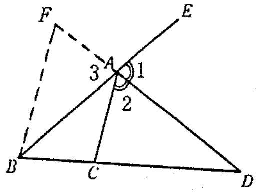

圖12

㈡如圖12，證明過程與㈠雷同。

六、第6種證法。

㈠如圖13。

㈡如圖14。

二者的證明過程，皆與“第5種證法”雷同。

圖13

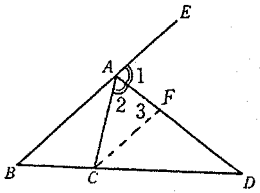

圖14

七、第7種證法

㈠如圖15，若$\angle C > \angle B$。

在$\angle C$之內部作$\angle 3 = \angle B$，交$\overline{AD}$於F。

又$\angle 1 = \angle 2$，

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACF$(AA相似)

則$\overline{BD} : \overline{CF} = \overline{AB} : \overline{AC}$，

且$\angle 4 = \angle 5$。

$\therefore \angle 6 = \angle 7$，

則$\overline{CF} = \overline{DC}$。

故$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC}$。

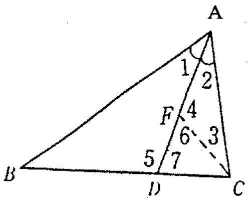

圖15

㈡如圖16，若$\angle C > \angle B$。

在$\angle C$之 內部作$\angle 3 = \angle B$，交$\overleftrightarrow{AD}$於F。

又$\angle 4 = \angle 1 = \angle 2$，

即$\angle FAC = \angle BAD$，

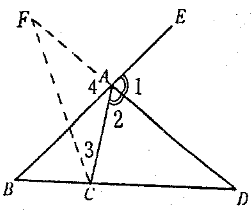

圖16

∴△ABD～△ACF(AA相似)
則$\overline{BD}:\overline{CF}=\overline{AB}:\overline{AC}$，
且∠F=∠D。
∴$\overline{CF}=\overline{DC}$。
故$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}$。

八、第8種證法

(一)如圖17，

(二)如圖18，若∠C>∠B。
在∠B之外部作∠ABF=∠C，交$\overleftrightarrow{AD}$於F。
其餘的證明過程，皆與"第7種證法"雷同。

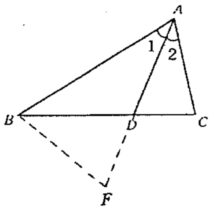

圖17

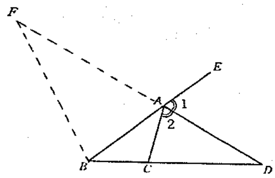

圖18

九、第9種證法

(一)如圖19，作$\overline{CF}\perp\overleftrightarrow{AD}$，$\overline{BG}\perp\overleftrightarrow{AD}$，F、G爲垂足。
又∠1=∠2，
∴△ACF～△ABG(AA相似)
則$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BG}:\overline{CF}$。
又∠3=∠4，
∴△BDG～△CDF(AA相似)
則$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{BG}:\overline{CF}$。
故$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}$。

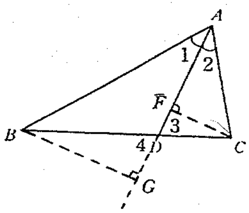

圖19

(二)如圖20，作$\overline{CF}\perp\overleftrightarrow{AD}$，$\overline{BG}\perp\overleftrightarrow{AD}$，F、G爲垂足。
又∠3=∠1=∠2，
∴△ACF～△ABG(AA相似)
則$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BG}:\overline{CF}$。
又∠D=∠D，
∴△BDG～△CDF(AA相似)
則$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{BG}:\overline{CF}$。
故$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}$。

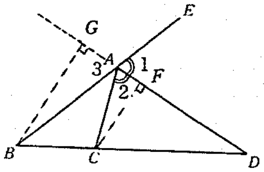

圖20

十、第10種證法

㈠如圖21，作△ABC的外接圓，交$\overleftrightarrow{AD}$於F。連接$\overline{BF}$。

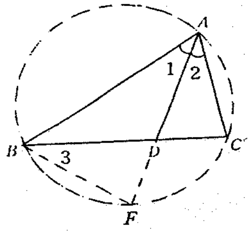

圖21

∵∠2=∠3，∠C=∠F，

∴△ACD～△BFD(AA相似)

則 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BF}}$…………(4)

∵∠1=∠2，∠C=∠F，

∴△ACD～△AFB(AA相似)

則 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{BF}}{\overline{AB}}$…………(5)

(4)×(5)得 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}}$。

故$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}$。

㈡如圖22，作△ABC的外接圓，交$\overleftrightarrow{AD}$於F。連接$\overline{BF}$。

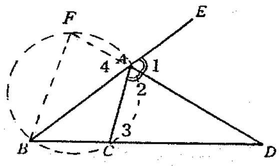

圖22

∵∠3=∠F，∠D=∠D，

∴△ACD～△BFD(AA相似)

則 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BF}}$…………(6)

∵∠3=∠F，∠4=∠1=∠2，

∴△ACD～△AFB(AA相似)

則 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{BF}}{\overline{AB}}$…………(7)

(6)×(7)得 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}}$ 。

故$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}$。

十一、第11種證法

㈠如圖23，作$\overline{DF}\perp\overline{AB}$，$\overline{DG}\perp\overline{AC}$，F、G爲 垂足。

$\because$ $\overline{AD}$爲△ABC中∠A的平分線，

$\therefore$ $\overline{DF}=\overline{DG}$，

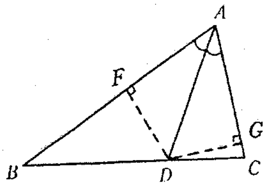

圖23

則$\dfrac{\triangle ABD}{\triangle ACD}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$(等高)

又$\dfrac{\triangle ABD}{\triangle ACD}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$(同高)

故$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}$。

㈡如圖24，證明過程與㈠雷同。

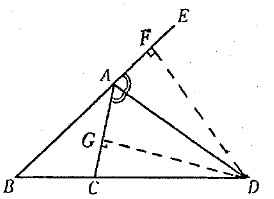

圖24

十二、第12種證法

㈠如圖25，作$\overline{DF}$ // $\overline{AB}$，交$\overline{AC}$於F；作$\overline{DG}$ // $\overline{AC}$，交$\overline{AB}$於G。

則$\dfrac{\overline{BG}}{\overline{GA}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FC}}$。

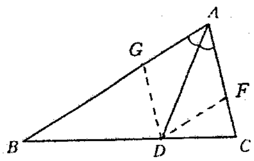

圖25

但$\overline{AD}$爲△ABC中∠A的平分線，

$\therefore$四邊形AGDF爲菱形，

即$\overline{GA}=\overline{AF}$，

$\therefore\dfrac{\overline{BG}}{\overline{AF}}=\dfrac{\overline{GA}}{\overline{FC}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$。

利用”和比性質”得

$\dfrac{\overline{BG}+\overline{GA}}{\overline{AF}+\overline{FC}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$。

故$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}$。

㈡如圖26，作$\overline{DF}\parallel\overline{AB}$，交$\overleftrightarrow{AC}$於F：作$\overline{DG}\parallel\overline{AC}$，$\overleftrightarrow{AB}$於G。

則 $\dfrac{\overline{BG}}{\overline{GA}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FC}}$。

但$\overline{AD}$平分$\angle EAC$，

∴四邊形AGDF爲菱形，

即$\overline{GA}=\overline{AF}$，

∴ $\dfrac{\overline{BG}}{\overline{AF}}=\dfrac{\overline{GA}}{\overline{FC}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$。

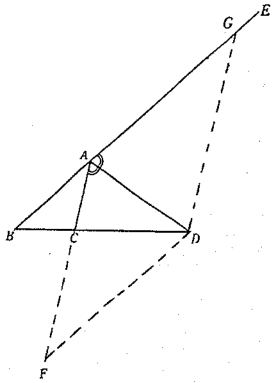

圖26

利用“和比性質”得

$$\frac{\overline{BG}+(-\overline{GA})}{\overline{AF}+(-\overline{FC})}=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}。$$

故$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}$。

十三、第13種證法

㈠如圖27。

∵ $\angle\alpha=\angle\beta$，

∴ $\sin\alpha=\sin\beta$。

則$\triangle ABD:\triangle ACD$

$=1/2\ \overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\sin\alpha:1/2\ \overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdot\sin\beta$

$=\overline{AB}:\overline{AC}$。

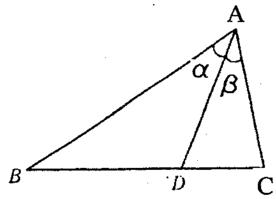

圖27

又$\triangle ABD:\triangle ACD=\overline{BD}:\overline{CD}$(同高)。

故$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}$。

㈡如圖28。

∵ $\angle BAD+\angle\alpha=180°$，

且$\angle\alpha=\angle\beta$，

∴ $\angle BAD+\angle\beta=180°$，

即$\sin\beta=\sin\angle BAD$。

其餘的證明過程，皆與㈠同。

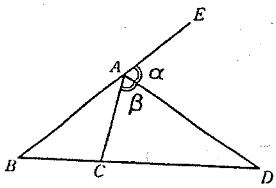

圖28

十四、第14種證法

(一)如圖29。利用“正弦定律”

在△ABD中，得 $\dfrac{\overline{BD}}{\sin\alpha}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin\gamma}$

在△ACD中，得 $\dfrac{\overline{CD}}{\sin\beta}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin\delta}$

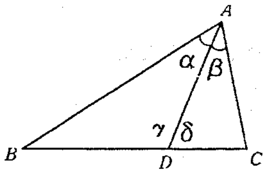

圖29

$\because \angle\alpha=\angle\beta$，$\therefore \sin\alpha=\sin\beta$

$\because \angle\gamma+\angle\delta=180°$，$\therefore \sin\gamma=\sin\delta$。

故 $\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}$。

(二)如圖30。利用“正弦定律”

在△ABD中，得 $\dfrac{\overline{BD}}{\sin\angle BAD}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin D}$

在△ACD中，得 $\dfrac{\overline{CD}}{\sin\beta}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin D}$

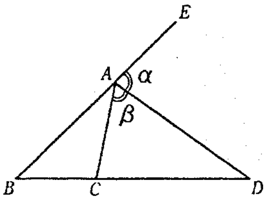

圖30

$\because \angle BAD+\angle\alpha=180°$，且 $\angle\alpha=\angle\beta$，

$\therefore \angle BAD+\angle\beta=180°$，即 $\sin\beta=\sin\angle BAD$。

故 $\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}$。

參、結語

上述“三角形內、外角平分線性質定理”的十四種證法中，除了“第13種證法”利用“面積公式”，“第14種證法”利用“正弦定律”，二者超出國中教材範圍外；其他皆完全適合國中生之程度。當然，證法一定還有很多。只有請各位先進，大夥來動腦筋了。

肆、參考資料

袁曉東編(1992)：淺談幾何輔助線。（北京）北京師範大學出版社。

徐名亮、粵山編著(1991)：平面幾何巧解。（上海）同濟大學出版社。

張景中著（民84）：平面幾何新路。（台北）九章出版社。

國立編譯館主編（民84）：國民中學選修數學習作（下册）。（台北）國立編譯館。