中學數學挑戰徵答題參考解答評析

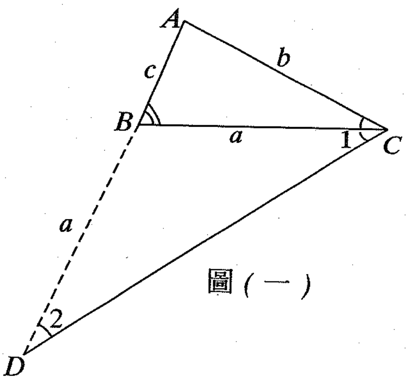
設計者：通訊解題發掘數學資優生研究小組

問題編號 1001

（1）$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的對邊長依次爲a、b、c，如果$\angle B=2\angle C$，則$b^2=c(a+c)$。試證之。

（2）設上述$\triangle ABC$的三邊長爲三個連續整數，試求所有滿足此條件的三角形。

解答：第一部分：證明：



圖（一）

證法（一），如圖（一）

（1）延長AB至D使$\overline{BD}=\overline{BC}=a$，連接$CD$

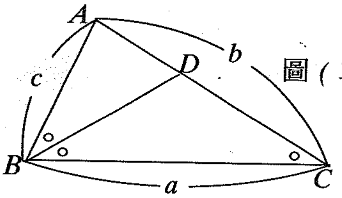
（2）$\angle 1=\angle 2$，$\angle ABC=\angle 1+\angle 2=2\angle 1=2\angle ACB$

$\therefore \angle ACB=\angle 1=\angle 2=\angle ADC$且$\angle ABC=\angle ACD$

（3）$\triangle ABC\sim\triangle ACD$（$AA$相似）

（4）$\dfrac{b}{c}=\dfrac{c+a}{b}$即$b^2=c(a+c)$

證法（二），如圖（二）



圖（二）

作$\angle B$之分角線$\overline{BD}$，則$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle B=\angle C$

又$\angle A=\angle A$，$\therefore \triangle ABD\sim\triangle ACB$（$AA$）

$\Rightarrow \overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{AC}$

$\Rightarrow (b\cdot\dfrac{c}{c+a}):c=c:b\Rightarrow c^2=b^2\cdot\dfrac{c}{c+a}$，

$\Rightarrow b^2=c(c+a)$

第二部分：求三角形的個數

由上面的結論得知$b^2=c(c+a)$，因此b不可能是最小邊，有下列三種可能：

（1）$c=x$，$b=x+1$，$a=x+2$時

$(x+1)^2=x(x+x+2)\Rightarrow x=1\Rightarrow a=3,b=2,c=1$（不可能）

（2）$b=x+2$，$c=x+1$，$a=x$時

$(x+2)^2=(x+1)(x+x+1)\Rightarrow x^2-x-3=0\Rightarrow x$不是整數

（3）$b=x+2$，$a=x+1$，$c=x$時

$(x+2)^2=x(x+1+x)\Rightarrow x=4$即$a=5$，$b=6$，$c=4$

因此滿足命題條件的三角形恰有一個，即邊長爲4,5,6的三角形。

《解題重點》

1. 可將$b^2=c(a+c)$轉化成$\frac{b}{c}=\frac{c+a}{b}$，因此可考慮建構以$b$爲公共邊的相似三角形來得到比例式。
2. 證法（一），由$\overline{AB}$邊延長a，產生$c+a$長的邊，再利用外角定理及$\angle B=2\angle C$的關係，就能建構所要的相似三角形。
3. 證法（二），利用角平分線分對邊成比例及相似形對應邊成比例式的性質得到。
4. 利用大角對大邊的三角形基本性質，分析出連續整數長的三角形情況，窮舉檢驗即可得所有可能的三角形。

《評　　析》

1. 本題是一題多解的典型問題，參與本題徵答的學生數最多，計有高雄女中謝蕙如等182人，得分率也最高，幾乎都是滿分。最特別的高雄市博愛國小五年級朱浩瑋同學也參與徵答，其作法跟證法（二）類似，從其書寫答題方式顯示其數學能力已達高一以上程度。
2. 第一部分多數以證法（二）來解題，而用證法（一）的比例亦高，亦常見用三角函數的正餘弦定律推導。
3. 部分學生從角A作補助線，已先假定$\angle A>\angle C$，這是不正確的。
4. 約有一成左右的徵答題對第二部分得出三角形三邊長爲1，2，3，未去除這個答案，核驗解答的工作仍應加強。

問題編號 1002

設$A_n=2786^n+2597^n-2801^n-2497^n$，試確定所有正整數$n$，使85可整除$A_n$。

解答：（1）$A_n=(2597^n-2497^n)-(2801^n-2786^n)$

$=(2597-2497)q-(2801-2786)p$ 其中p,q都是整數

$=100q-15p=5(20q-3p)\Rightarrow 5\mid A_n$，對任意正整數$n$

（2）$A_n=(2786^n-2497^n)-(2801^n-2597^n)$

$=(2786-2497)u-(2801-2597)v$ 其中u,v都是整數

$=289u-204v=17(17u-12v)\Rightarrow 17\mid A_n$，對任意正整數$n$

（3）$(5,17)=1$且 $5\mid A_n$，$17\mid A_n$，$85=5\times 17$

所以$85\mid A_n$，對任意正整數n均成立

《解題重點》

1. 觀察特例$n=1,2$經由特例式子整理，臆測一般的n亦都成立。

2. $n\in N$，$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$，

   即可推得$(a-b)\mid a^n-b^n$。

3. 任意整數a,b，如果$(a,b)=1$，$a\mid n$且$b\mid n$，則$ab\mid n$。

《評析》

1. 本題參與徵答學生數也很多，計有北一女葉書蘋等159人，得分率亦高。

2. 除了參考解法外，也有相當比例的學生使用同餘知識，利用模5或模17作答，其過程很便捷易懂。

問題編號 1003	證明：有無窮多的正整數n，滿足$n\mid 2^n+1$。

解答：證法（一）

（1）當$n=1,2,3,\ldots,9,10$時，可以檢驗得

$1\mid 2^1+1$，$3\mid 2^3+1$，$9\mid 2^9+1$且其餘均不滿足$n\mid 2^n+1$

由此結果，不妨猜測$n=3^k$，$k=0$或任意正整數時，$n\mid 2^n+1$

（2）我們用數學歸納法，證明這個猜測是正確的

（*I*）當$k=0,1$時，顯然成立

（*II*）假設$n=3^k$（其中k為正整數）時$n\mid 2^n+1$

則當$n=3^{k+1}$時，令$2^{3^k}=3^k\cdot p-1$，p為某整數

$$2^{3^{k+1}}+1=2^{3^k\cdot 3}+1=(2^{3^k})^3+1=(3^k\cdot p-1)^3+1$$

$$=(3^k\cdot p)^3-3(3^k\cdot p)^2+3(3^k\cdot p)-1+1$$

$$=3^{k+1}\cdot(3^{2k-1}\cdot p^3)-3^{k+1}\cdot(3^k\cdot p^2)+3^{k+1}\cdot p$$

$$=3^{k+1}\cdot q\ (q\text{為某整數})$$

所以$3^{k+1}\mid 2^{3^{k+1}}+1$，即$n=3^{k+1}$時，$n\mid 2^n+1$

由數學歸納法知：$n\mid 2^n+1$，其中$n=3^k$，對任意非負整數均成立，所以本命題成立。

證法（二）

若n為正整數且$n\mid 2^n+1$，則因為2^n+1為奇數，故存在正奇數k，$k>1$，使$2^n+1=nk$，取$m=2^n+1$，則$2^m+1=2^{nk}+1=(2^n)^k+1$

$= (2^n+1)[(2^n)^{k-1}-(2^n)^{k-2}+(2^n)^{k-3}-\cdots-(2^n)^1+1]$

因此我們可確定當$n|2^n+1$時，$2^n+1|2^{2^n+1}+1$

又$n=1$時，$1|2^1+1$，我們可逐步遞推3，9，513，……等

無窮多個正整數m，滿足$m|2^m+1$

《解題重點》

1. 由$n=1,2,3,\ldots$逐步推出滿足$n|2^n+1$的前幾個n，大膽歸納假設$m=3^k$形的數有$m|2^m+1$的關係。
2. 用數學歸納法來推論，並利用指數定律$(a^n)^m=a^{nm}$的關係及三次方$(x+y)^3$展開式。
3. 證法（二）中，利用當n爲奇數時
   $x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots-x+1)$的關係來推論。

《評析》

1. 本題配合高一上數學歸納法單元設計，參與答題學生數亦多，計有北市陽明高中李政杰等126人，得分率亦高。
2. 在得分率而言，高一0.84，高二0.90，高三1.00，各年級差距較大，歸納技術需有成熟度配合，值得注意。

問題編號 1004

20個同學在草地上圍成一圈開營火晚會，有足量的巧克力糖給他們當點心。（以粒爲單位，可以吃任意多粒。）晚會結束時，統計一下每個人吃的數量，發現不論每個人吃了多少粒，總有一些座位連在一起的人（可能一人或可含全部），他們吃的數量和爲20的倍數，爲什麼？

解答：20個人圍成一圈，任選一個人開始，依順時鐘方向（亦可逆時鐘方向），20個人吃的巧克力數量分別爲$a_1,a_2,a_3,\ldots\ldots,a_{19},a_{20}$

令$S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k, k=1,2,3,\ldots,20$

如果S_k中有一個數爲20的倍數，則本命題成立。

否則S_k被20除，必有餘數，令其爲r_k，$k=1,2,3,\cdots,20$

今20爲除數的非零的餘數有$1,2,3,4,\cdots\cdots,19$等共19個，

因此$r_1,r_2,\cdots,r_{20}$中至少有兩個，令其爲r_i,r_j，使$r_i=r_j$，$1\le i<j\le 20$

此時$S_j-S_i=a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_j$爲20的倍數，即相鄰的第$i+1,i+2,\ldots$至第$j$個人。

他們吃的數量和爲20的倍數，由此可知本命題必成立。

《解題重點》

1. 除法原理：任意正整數a,b，必有整數q,r，使$a=bq+r$，其中$0\le r<b$

2. 建構累積量數列（S_k），$s_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$。

3. 鴿籠原理：20個餘數放入19個同餘類的籠子，必有兩個在同一籠子裏。

4. a,b 模 c 同餘 $\Rightarrow c\mid a-b$。

《評析》

1. 本題參與徵答學生數將近一半的比例，計有武陵高中黃世昌等101人，較前三題低，完全在意料之中。主因是涉及"鴿籠原理"的知識。

2. 本題得分率亦高，大部分徵答者都會利用所提示的鴿籠原理，這是很好的現象。對於數學能力的提昇與增強數學競賽的能力應有極大的助益。

問題編號 1005

設 a_1，a_2，……，a_n 都是正數，且 $\sum_{j=1}^{n}a_j\le n$；

試＊確定所有的正整數n，使得下列不等式恆成立：

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{1+a_j^2}\le\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+a_j}\ 。$$

解答：證法（一）（採自建國高中郭文雄之解法）

不妨將 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 由小而大重排爲 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 其中 $\sum_{j=1}^{n}b_j=\sum_{j=1}^{n}a_j\le n$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{1+a_j^2}=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{1+b_j^2}，\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+a_j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+b_j}$$

（1）$b_1\le b_2\le b_3\le\cdots\le b_n\le 1$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+a_j}-\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{1+a_j^2}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+b_j}-\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{1+b_j^2}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1-b_j}{(1+b_j)(1+b_j^2)}\ge 0$$

（2）$b_1\le b_2\le b_3\le\cdots\le b_k\le 1\le b_{k+1}\le b_{K+2}\le\cdots\le b_n$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+a_j}-\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{1+a_j^2}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+b_j}-\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{1+b_j^2}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1-b_j}{(1+b_j)(1+b_j^2)}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\frac{1-b_j}{(1+b_j)(1+b_j^2)}+\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1-b_j}{(1+b_j)(1+b_j^2)}$$

$$\ge\frac{1}{(1+b_k)(1+b_k^2)}\sum_{j=1}^{k}(1-b_j)+\frac{1}{(1+b_k)(1+b_k^2)}\sum_{j=k+1}^{n}(1-b_j)$$

$$=\frac{1}{(1+b_k)(1+b_k^2)}\sum_{j=1}^{n}(1-b_j)=\frac{n-\sum_{j=1}^{n}b_j}{(1+b_k)(1+b_k^2)}\ge 0\ ，得證$$

$\Rightarrow$對所有$n\in N$，$\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{1+a_j^2}\le\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+a_j}$

證法（二）：（採自雄中盧佑群及師大附中林建位之解法）

（1）因爲$\sum_{j=1}^{n}a_j\le n=\sum_{j=1}^{n}1\Rightarrow\sum_{j=1}^{n}(1-a_j)\ge 0$

所以若有$a_k>1$，則一定有$a_h<1$

（2）①若$a>1$，$\frac{a-1}{1+a+a^2+a^3}<\frac{a-1}{4}$ ……………………（a）

②若$1\ge a>0$，$\frac{1-a}{1+a+a^2+a^3}\ge\frac{1-a}{4}$ ………………（b）

（3）$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+a_j}-\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{1+a_j^2}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1+a_j}-\frac{a_j}{1+a_j^2}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1-a_j}{1+a_j+a_j^2+a_j^3}$ …..（i）

（4）若$b_i>1,(i=1,2,\ldots,m)$，$b_l\le 1,(l=1,2,\ldots,h)$，則將$(i)$式分成二部分，使一部分爲$b_i$，一部分爲$b_l$，則

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+a_j}-\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{1+a_j^2}$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{1-b_i}{1+b_i+b_i^2+b_i^3}+\sum_{l=1}^{h}\frac{1-b_l}{1+b_l+b_l^2+b_l^3}$$
$$=\sum_{l=1}^{h}\frac{1-b_l}{1+b_l+b_l^2+b_l^3}-\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i-1}{1+b_i+b_i^2+b_i^3}\quad（因爲 bi>1,i=1,2,\ldots m）$$
$$\ge\frac{1}{4}\left[\sum_{l=1}^{h}(1-b_l)-\sum_{i=1}^{m}(b_i-1)\right]\quad（因爲上式(a)，(b)）$$
$$=\frac{1}{4}\left[\sum_{l=1}^{h}(1-b_l)+\sum_{i=1}^{m}(1-b_i)\right]$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}(1-a_j)\ge 0$$

（5）故得證$\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{1+a_j^2}\le\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+a_j}$

證法（三）

（1）對任意正數a_j而言，$1+a_j^2\ge 2a_j$，所以$\dfrac{a_j}{1+a_j^2}\le\dfrac{1}{2}$，因此任意正整數$n$，
$\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{1+a_j^2}\le n\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$。

（2）對任意正數a_j，$\sqrt{1+a_j}$ 爲實數。所以，對任意正整數n，由柯西不等式知

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt{1+a_j}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+a_j}}\right)^2\le\left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt{1+a_j}^{\,2}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+a_j}}\right)^2\right)$$

即$n^2\le(n+a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+a_j}\right)\le 2n\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+a_j}\right)$

得$\dfrac{n}{2}\le\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+a_j}$

由（1）與（2）的結果，我們可以確定對任意正整數n，
$\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{1+a_j^2}\le\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+a_j}$恒成立

《解題重點》

1. 針對$n=3$特例觀察左右式之上下界爲"$\frac{3}{2}$"，分別證之，發現其規律可推廣到一般的n。
2. 任意實數x，$(1-x)^2\ge 0$，因此$1+x^2\ge 2x$。
3. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{1+a_j^2}\le\frac{n}{2}$，因此$\frac{n}{2}$可以作爲不等式兩端的橋樑。

4. 算幾不等式：任意兩正數x,y，恒有$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$的關係。因此，$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$對任意正數$a,b$恒成立。

或柯西不等式：$a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n$爲$2n$個實數，恒有

$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leq(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$的關係。

5. 不等量加法性質。

《評析》

1. 本題難度最高，參與徵答的學生數較少，僅有建國高中李國禎等79人，得分率大幅降低。

2. 部分徵答者誤用下面結論證題：

當$a_i>0$，$b_i>0$，且$\sum_{i=1}^{n}a_i\geq\sum_{i=1}^{n}b_i$，則$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}$。亦有部分同學在不等式的放大或縮小的過程中，未仔細討論，以致錯誤，值得注意。

3. 證法（一）（二）思考方向、書寫方式及解題品質甚佳，本題徵答者中，高一學生以盧佑群、王紹宇、林耕賢（雄中）；林宗茂、劉俊緯（台中一中）；梁東尼（台南一中）；陳彥年（嘉中）；李國禎（建中）等八位最優異。高二學生以吳君淳、李怡璇（北一女）；胡台威、莊家勛（武陵）；黃柏凱（嘉中）；沈至豪（花蓮高中）；蔡孟哲（長榮中學）等七位最優異。高三學生則以陳思妤（北一女）；郭文雄、余家偉（建中）；黃佳慧（聖功女中）；彭彥碩、鍾招宏（武陵）等六位最優異。

評註：

1、本次徵答統計簡表如下：

		問題	1001	1002	1003	1004	1005
高中部	總計 199人	得分	1177	1009	772	603	272
		得分率	0.92	0.91	0.88	0.85	0.49
一年級	148人	得分	863	739	515	382	112
		得分率	0.92	0.90	0.84	0.79	0.30
二年級	32人	得分	205	172	152	130	73
		得分率	0.94	0.91	0.90	0.98	0.74
三年級	19人	得分	115	104	105	91	87
		得分率	0.97	0.99	1.00	1.00	0.96

參與徵答總人數共204人 計：　高中生　199人 　　　國中生　2人 　　　國小生　1人 　　　無名氏　2人	參與徵答總校數：30所 計：　計畫內：　15所 　　　非計畫內：　15所

2、參與此次徵答的學校數共30所，以本年度特別成立數學資優班的雄中高一學生數最多，答題品質稱冠，值得慶賀。

3、現在全國有資優班的高級中學中，有新竹高中、台中女中、台南女中、彰化高中、鳳山高中等五校沒有任何學生參與徵答題，反而有國小、國中、及私立高中的學生參與徵答，兩者對照之下，實有天壤之別。

4、學生作答之心得感言摘錄，值得參考：

①做了一題題目之後，經過了多次嘗試才曉得數學這東西並不是只靠自己的直覺認爲題目應該是如何？因爲正確的答案是往往會令你感到奇怪，甚至認爲自己做錯了，做數學要講求的是證據，所以自己在做數學時，要特別注意解題時所需要的態度。（范均誌，陽明高中）

②從拿到題目起，有近一個月的時間，總算在最後一刻想出來了，眞好。（溫雅如，光仁中學）

③解了五題數學，不管方法好不好，對不對，心裡覺得很充實，幾天的課餘時間用來想它，縱使有些事尚未完成，但絲毫無後悔之心，或許這就是對數學的熱衷吧！但卻很難找到幾個志同道合的同學來互相研究（類似此類的問題），總覺得他們只對課內之問題感興趣，有些老師亦是如此。眞不知道該說什麼……。

我熱愛數學，我對以上的解答的1004不甚滿意，希望能看到更好之解法。我在想，數學家不也是人嗎？那爲什麼能發現常人想都沒想到的定理，甚至有些人更被稱爲神童，童年期即在研讀我到現在還不熟的微積分，會不會有些事太誇張了，或者是數學家有天生的能力。（林耕賢，雄中）

④在解1004題之前，參閱了一些有關鴿籠原理的資料，覺得此原理日常生活中隨處可見，把它用在解題上更是實用。（陳保成，嘉中）

⑤1至4題幾乎看完題目就有解題方向，且方向正確，第5題方向較不明顯，但因可用常用不等式解答，故經嘗試，亦很快得解。（莊家勛，武陵）

⑥爲了解這五題，花了不少時間，但也增進了許多數系的基本處理能力，甚是值得！（盧佑群，雄中）