第二十七屆國際物理奧林匹亞競賽
試題及參考解答（Ⅰ）

OSLO 1996
27th INTERNATIONAL
PHYSICS OLYMPIAD

挪威 奧斯陸

林明瑞
國立臺灣師範大學物理系

理 論 競 賽
1996年7月2日
答卷時間：五小時

請先仔細閱讀以下規定

1.你只能用所提供之筆書寫。

2.你只能在答題紙上有標示的頁面作答。

3.每題開始時請換用新頁。

4.答案中應以方程式與數字為主，精簡文字敘述。

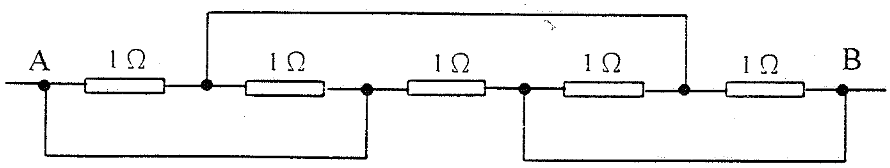
5.在每一頁答題紙的頂端寫明：

- 個人參賽編號（*IPHO*識別號碼）
- 大題題號與子題題號，例：2/*a*
- 每頁按序連續編號

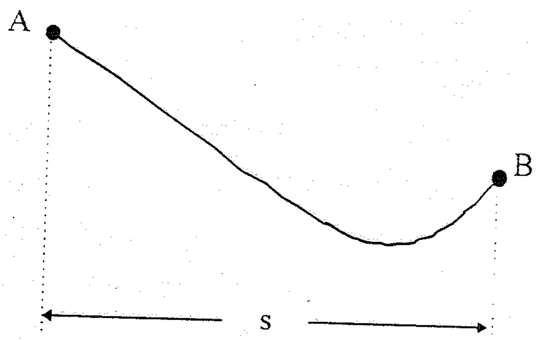
6.在封面寫明作答總頁數。

問題1

a）5個1 Ω的電阻相連接如圖所示，導線（圖中實線）的電阻可以忽略。試計算*A*與*B*兩點之間的等效電阻*R*。（1分）



b）一滑雪者在*A*點從靜止開始滑下山坡，途中不轉彎也不煞車，摩擦係數爲μ。當他滑到*B*點時恰好停止，他的水平位移是*s*。試問*A*點與*B*點之間的高度差是多少？（滑雪者的速度很小，因雪道曲率所造成的額外壓力可以忽略，也可忽略空氣阻力及摩擦係數隨速度的變化）。（1.5分）

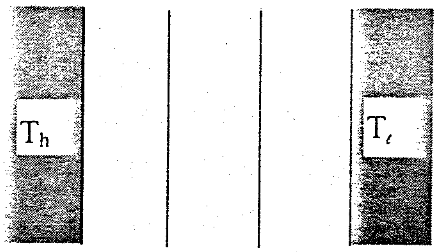


c）一絕熱金屬在一大氣壓之下通以電流加熱，此金屬所獲電能的功率爲一常數*P*。金屬的絕對溫度隨時間的變化如下：

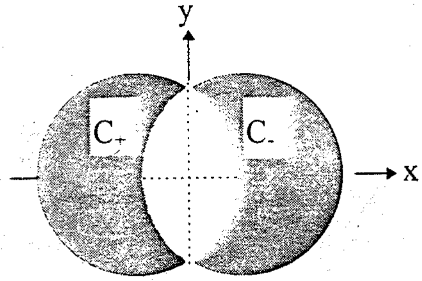
$$T(t)=T_0[\ 1+a(t-t_0)\ ]^{1/4}$$

其中a，t_0與T_0爲常數。試求出金屬的熱容量$C_p(T)$（即在實驗溫度範圍之內，熱容量隨溫度變化的關係式）（2分）

d）一黑色平板表面維持固定的高溫T_h，另一黑色平板表面維持固定的低溫T_e，兩者互相平行，兩板之間爲眞空。爲了減少由於輻射所引起的熱流，在兩平板之間平行放置熱屏蔽裝置，此熱屏蔽裝置係由兩個薄黑片組成，彼此之間沒有熱傳導。經過一段時間，達到穩定狀態。試問在有熱屏蔽裝置的情況下，穩定的熱流和原來熱流的比值ξ爲多少？忽略任何有限平面的邊緣效應。（1.5分）

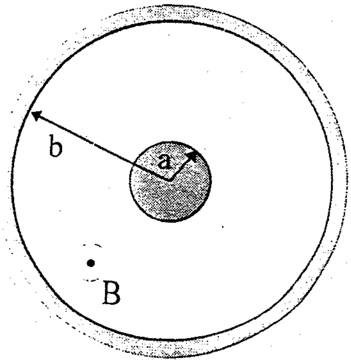


e) 有二極長且彼此絕緣的非磁性導體C_+和C_-，分別負載有沿 $+z$ 和 $-z$ 方向的電流I。二導體的橫切面（圖中斜線部分）位於$x-y$平面，並分別限制在直徑為D的二圓內，二圓心相距$D/2$，因此每一導體橫切面的面積分別為（$\frac{1}{12}\pi+\frac{1}{8}\sqrt{3}$）$D^2$。假設流過每一導體的電流均勻分布於橫切面。試求兩導體間中空部分區域的磁場向量$B(x,y)$。（4分）



問題2

如圖所示，兩個同軸圓柱導體之間的空間為真空，內圓柱半徑為a，外圓柱的內半徑為b。以外圓柱體為正極，相對於內圓柱，可施加一正電位V。另亦施有一穩定的均勻磁場$\vec{B}$，其方向平行於圓柱中心軸，且指出紙面。



靜止質量為m，電荷為$-e$的電子由內圓柱表面被釋放出來，我們將研究此電子的運動情形。導體內的感應電荷可以忽略不計。

a) 首先只施加電壓V，但磁場$\vec{B}=0$。一個電子由內圓柱表面釋放出來，其初速可忽略，試求電子抵達正極時的速度V。分別算出可忽略相對論效應及不可忽略相對論效應時的答案。（1分）

本問題以下部分以非相對論處理即可：

b) 現考慮$V=0$，但有均勻磁場$\vec{B}$作用的情形。一電子從內圓柱體表面以初速$\vec{V}_O$，沿徑向射出，當磁場大於某一臨界值B_c時，電子將無法到達正極。試繪出當磁場B稍微大於臨界值B_c時電子的運動軌跡，並求出臨界值B_c。（2分）

以下各題考慮電壓V及均勻磁場$\vec{B}$均不為零的情形。

c) 磁場會使電子具有對圓柱體中心軸不為零的角動量L。試寫出角動量時變率dL/dt的方程式。利用此方程式證明當電子運動時

$$L - \mathrm{k}eBr^2$$

爲一固定值，其中k是一個沒有單位的常數，r是電子與圓柱體中心軸的距離。試計算k值。（3分）

d）考慮一個電子由內圓柱表面釋放出來，其初速可忽略，且無法到達正極，其與圓柱中心軸的最大距離爲r_m。試求當電子到達此最大徑向距離時的速度V，以r_m表示之。（1分）

e）我們可用磁場來控制到達正極的電子流。當磁場B大於某一臨界磁場B_c時，一個以可忽略初速，從內圓柱表面釋放出的電子，將無法抵達正極。試求出B_c。（1分）

f）如果利用加熱內圓柱體來釋放出電子，這種電子通常從內圓柱體表面以不爲零的初速度被釋出。初速度平行於磁場$\vec{B}$的分量爲V_B，垂直於磁場$\vec{B}$的速度分量則分別爲V_r（沿半徑方向）與V_θ（沿方位角方向，即垂直於半徑方向）。試求出在此情況下，能使電子到達正極的臨界磁場B_c。（2分）

問題3

本問題中我們將考慮地球海洋潮汐現象的大略特性。我們將依下列假設來簡化問題：

（ⅰ）地球與月球可視爲一孤立系統

（ⅱ）月球與地球之間的距離可視爲定值

（ⅲ）假設地球表面完全被海洋所覆蓋

（ⅳ）地球繞自轉軸轉動的動力效應可以忽略

（ⅴ）地球引力的計算可視爲把地球的所有質量集中在地球中心來處理

給予下列數據：

地球的質量：$M = 5.98 \times 10^{24} kg$

月球的質量：$Mm = 7.3 \times 10^{22} kg$

地球的半徑：$R = 6.37 \times 10^{6} m$

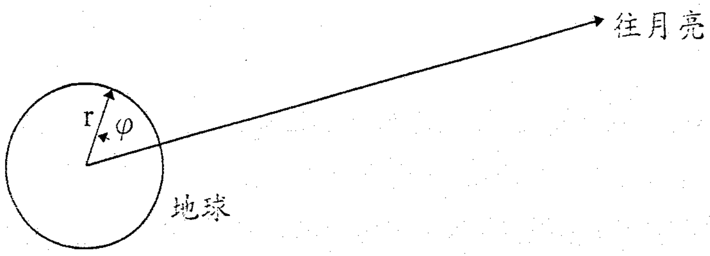
地球中心與月球中心之間的距離：$L = 3.84 \times 10^{8} m$

萬有引力常數：$G = 6.67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$

a）地球與月球以角速度ω環繞兩者的共同質心C。試問此質心C與地球中心之間的距離多遠（此距離以ℓ表示）？並求ω的數值。（2分）

以下我們採用的座標系統是隨著月球和地球一起環繞C的轉動座標系，在此座標系中地球液體表面的形狀是靜態的。

在通過C點並與轉動軸垂直的平面P中，地球液體表面上任一質點的位置，可用下圖所示之極座標r,φ來表示。此處r是該質點與地心的距離。



我們將探討在平面P中，地球液體表面形狀之方程式

$$r(\varphi)=R+h(\varphi)$$

b)考慮在地球液體表面上(在平面P中)的一質點(質量爲m)，在我們的座標系統中，它受到一離心力及來自月球與地球的引力。試寫出對應於這三種力的位能公式。(3分)

〔註〕：任何沿徑向方向的力$F(r)$都可以寫成一個球對稱位能$V(r)$之負微分：

$$F(r)=-V'(r)$$

c)試導出潮汐高度$h(\varphi)$的近似式，以所給之參數M, M_m等表示之。此模型中漲潮與落潮的高度差値爲何？(以公尺爲單位)。(5分)

在解題時，你可以利用下列的近似公式：

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\theta}}\approx 1+a\cos\theta+\frac{1}{2}a^2(3\cos^2\theta-1)$$

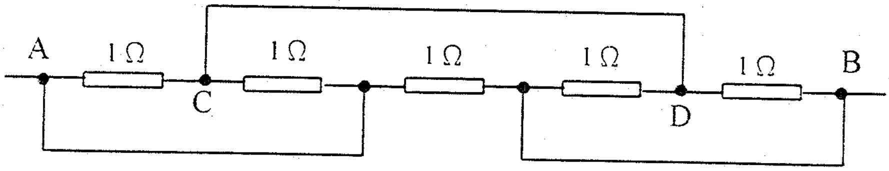
此近似公式在a遠小於1時成立。

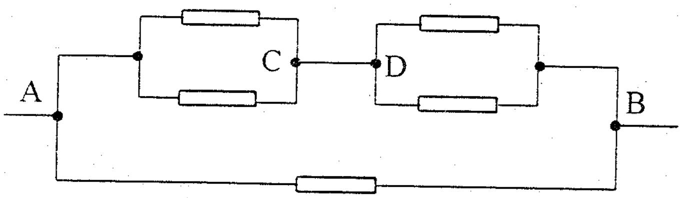
分析此題時，只要是合理的近似，都可以用來簡化解題。

参考解答

理論第一題

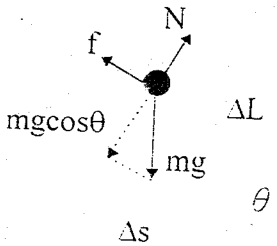
(a)原電路圖可改畫如下：





A 和 C 之間以及 D 和 B 之間的等效電阻分別同爲 0.5 Ω。此兩 0.5 Ω 串聯後與另一 1 Ω 電阻並聯，因此由上圖可知 A 和 B 之間的總等效電阻 $\underline{R_{AB}=0.5\,\Omega}$。

(b) 就很短的水平位移 ΔS 而言，則滑雪者所經的坡道 ΔL 可視爲一直線，其受力圖如下圖所示：



在垂直於坡道的方向上：$mg\cos\theta - N = \dfrac{mv^2}{R}$

式中 R 爲坡道的曲率半徑。由於題設滑雪者的速度很小，所以 $N \approx ms\cos\theta = mg\dfrac{\Delta s}{\Delta L}$

$\Rightarrow$ 摩擦力 $f = \mu N \approx \mu mg\dfrac{\Delta s}{\Delta L}$

$\Rightarrow$ 摩擦力所作的功 $W = \int f dL \approx \int \mu mg \dfrac{ds}{dL}\, dL = \mu mgs$

由能量守恆定律知：$\mu mg \approx \mu mgs$

$\Rightarrow \underline{h \approx \mu s}$

(c) 設在很小的時間間隔 dt 內，金屬所增加的溫度爲 dT，所獲的電能爲 Pdt，則其定壓熱容 Cp 爲：

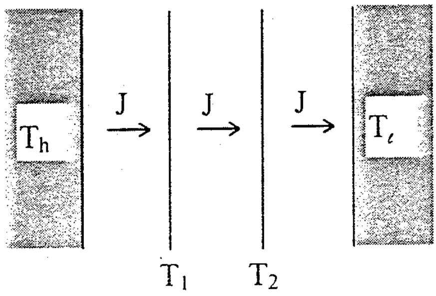
$$Cp = \frac{dQ}{dT} = \frac{Pdt}{dT} = \frac{P}{dT/dt}$$

$$\because \frac{dT}{dt} = T_o\frac{a}{4}\left[\ 1 + a(t-t_o)\ \right]^{-3/4} = T_o\frac{a}{4}\left(\frac{T_o}{T}\right)^3$$

$$\therefore Cp = \left(\frac{4P}{aT_o^{\,4}}\right) T^3$$

(*d*) 在穩定狀態時，相鄰平板間的淨熱流量皆相等。由熱輻射定律可得：

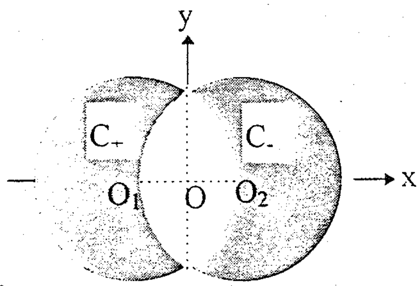
$$J = \sigma\left(T_h^4 - T_1^4\right)$$
$$J = \sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)$$
$$J = \sigma\left(T_2^4 - T_\ell^4\right)$$
$$\Rightarrow\ 3J = \sigma\left(T_h^4 - T_\ell^4\right) = J_0$$



式中J_0爲無熱遮蔽時的淨熱流量。所以 。

$$\xi = \frac{J}{J_o} = \frac{1}{3}$$

(*e*) 兩導體C_+和C_-之間中空區域的磁場強度，可由兩假想圓柱形載流導體所生的磁場疊加求得，因爲兩者重疊區域內的電流反向而使其磁效應互相抵消。設流經每一個圓柱導體截面的電流爲I'，而流經眞正月形導體截面的電流爲I，則兩電流的比值等於兩導體截面面積之比，即



$$\frac{I'}{I} = \frac{\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right)}{\frac{\pi}{4}D^2} D2 = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6\pi}$$

根據安培定律，中心軸通過O_1的極長載流圓柱導體所生的環形磁場，在距中心軸爲r處的強度爲

$$B_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi r}\left(\frac{I'}{\frac{1}{4}\pi D^2}\right)\pi r^2 = \frac{2\mu_0 I' r}{\pi D^2}$$

若以O_1爲$x_1 - y_1$座標系的原點，則在x_1和y_1方向上的磁場分量分別爲

$$Bx_1 = -B_\varphi\frac{y_1}{r} = -\frac{2\mu_0 I' y_1}{\pi D^2}\text{，}B_{y_1} = B_\varphi\frac{x_1}{r} = \frac{2\mu_0 I' x_1}{\pi D^2}$$

同理可得，另一個中心軸通過O_2的圓柱體的磁場分量：

$$B_{x_2} = B_\varphi\frac{y_2}{r} = \frac{2\mu_0 I' y_1}{\pi D^2}\text{，}B_{y_2} = -B_\varphi\frac{x_2}{r} = -\frac{2\mu_0 I' x_2}{\pi D^2}$$

現以O點爲$x-y$座標系的原點，在圖中中空區域內任一點的座標爲(x,y)，則因O_1和O_2的座標分別爲$\left(-\frac{D}{4},\ 0\right)$和$\left(+\frac{D}{4}, 0\right)$，所以

$$x_1 = x + \frac{D}{4} \quad , \quad x_2 = x - \frac{D}{4}$$

$$y_1 = y_2 = y$$

兩眞正導體之間中空區域的磁場向量爲

$$B_x = B_{x_1} + B_{x_2} = 0$$

$$B_y = B_{y_1} + B_{y_2} = \frac{2\mu_0 I'}{\pi D^2} \left[(x + \frac{D}{4}) - x - \frac{D}{4}) \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I'}{\pi D} = \frac{6\mu_0 I}{(2\pi + 3\sqrt{3})D}$$

⇒此爲均勻磁場，朝向 $+y$ 方向。

評分標準：（本題總計10分）

(a) 1 分　(b) 1.5分　(c) 2 分　(d) 1.5分　(e) 4 分

理論第二題

(a) 電子得到的位能轉換成動能，即

$$\frac{1}{2} mv^2 = eV \qquad \text{（非相對論）}$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 = eV \qquad \text{（相對論）}$$

解之可得

$$v = \begin{cases} \sqrt{2eV/m} & \text{（非相對論）} \\ c\sqrt{1 - \left(\dfrac{mc^2}{mc^2 + eV} \right)^2} & \text{（相對論）} \end{cases}$$

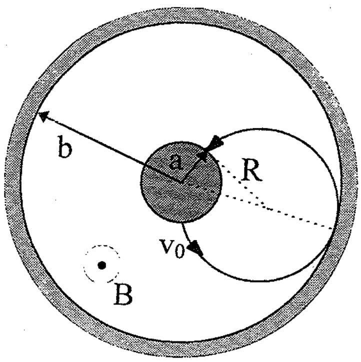
(b) 電位差 $V = 0$ 時，電子在一均勻的磁場中運動，其運動軌跡爲一圓形。當磁場增至稍微大於臨界值 B_c 時，其軌跡如下圖所示。電子所受的勞侖茲力即爲作圓運動所須的向心力。設軌跡半徑爲 R，則

$$evB_c = \frac{mv_o^2}{R} \Rightarrow B_c = \frac{mv_o}{eR}$$

$$\because \sqrt{a^2 + R^2} = b - R$$

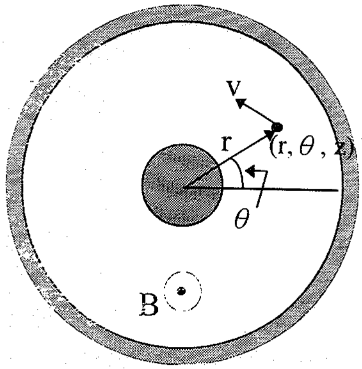
$$\Rightarrow R = \frac{b^2 - a^2}{2b}$$

$$\therefore B_c = \frac{2bmv_o}{e(b^2 - a^2)}$$



(c) 設取電子的圓柱形座標爲 (r, θ, z)，其中 $z-$軸爲內圓柱的中心軸，和磁場方向平

行，如下圖所示。



取對z－軸的角動量爲$\vec{L}$和力矩爲$\vec{\Gamma}$，則

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{\Gamma}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times(-e\vec{v}\times\vec{B})$$

式中　$\vec{v}=\dot{r}\vec{r}+r\dot{\theta}\vec{\theta}+r\dot{Z}\vec{z}$，$\vec{B}=B\vec{z}$，其中$\vec{r},\vec{\theta}$, 和$\vec{z}$皆爲單位向量。

$$\Rightarrow\vec{v}\times\vec{B}=-\dot{r}B\vec{\theta}+r\dot{\theta}B\vec{r}$$

$$\Rightarrow\frac{d\vec{L}}{dt}=er\dot{r}B\vec{z}$$

若去掉向量符號，則上式可寫成

$$\frac{dL}{dt}=erB\frac{dr}{dt}\quad\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(L-\frac{1}{2}eBr^2\right)=0$$

$$\Rightarrow\quad L-\frac{1}{2}eBr^2=\text{常數，即題中之}k=\frac{1}{2}$$

(d) 利用（c）題中之結果，分別取在內圓柱表面上和最大徑向距離r_m處所對應的L和r值，可得

$$0-\frac{1}{2}Ba^2=mvr_m-\frac{1}{2}Br_m^2\ \Rightarrow v=\underline{\frac{eB(r_m^2-a^2)}{2mr_m}}$$

(e) 當磁場強度增至臨界值Bc時，(d) 題解中之$r_m=b$。

$$v=\frac{eB_c(b^2-a^2)}{2mb}$$

又電子的動能是從電位能轉變而來，即$\frac{1}{2}mv^2=eV$，可得

$$v=\sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

由前兩式解之得

$$\frac{eB_c(b^2-a^2)}{2mb}=\sqrt{\frac{2eV}{m}}\quad\Rightarrow\underline{B_c=\frac{2b}{b^2-a^2}\sqrt{\frac{2mV}{e}}}$$

(f) 由於電子在磁場中運動所受的勞侖茲力，必定垂直於磁場方向，所以在平行於磁場的方向上，電子不受力，其對應的速度分量v_B保持不變。再則因爲v_B產生的位移平行於圓柱體的中心軸，所以和本題討論電子到達正極的問題無關。

設能使電子剛好能抵達正極所需的臨界磁場強度爲 B_c，電子到達正極時的速度在，$\vec{r},\vec{\theta},\vec{z}$方向上的分量爲（$o,v,v_B$），則由能量守恆定律，可得

$$\frac{1}{2}m(v_r^2+v_\theta^2+v_B^2)+eV=\frac{1}{2}m(v^2+v_B^2)$$

$$\Rightarrow v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2+2eV/m}$$

利用 (c) 題解的結果，得

$$mv_\theta a-\frac{1}{2}eB_c a^2=mvb-\frac{1}{2}eB_c b^2$$

將 v 代入上式，解得 B_C 如下：

$$Bc=\frac{2m(vb-v_\theta a)}{e(b^2-a^2)}=\underline{\frac{2mb}{e(b^2-a^2)}\left[\sqrt{v_r^2+v_\theta^2+\frac{2eV}{m}}-\frac{v_\theta a}{b}\right]}$$

評分標準：（本題總計10分）

(a) 1 分　(b) 2 分　(c) 3 分　(d) 1 分　(e) 1 分　(f) 2 分

理論第三題

(a) 取地球的中心爲原點，設地球和月球的共同質心 C 位於距地心 ℓ 處，則

$$M\ell=M_m(L-\ell)$$

$$\Rightarrow \ell=\frac{M_m}{M+M_m}L=4.63\times10^6\,m. \quad\cdots\cdots(1)$$

因爲 $\ell<R$，所以共同質心 C 位在地球內部。

地球和月球以角速度 ω 環繞共同質心 C 轉動。地球和月球之間的引力提供地球做圓運動所需的向心力，即

$$M\omega^2\ell=G\frac{MM_m}{L^2}$$

$$\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{GMm}{L^2\ell}}=\sqrt{\frac{G(M+M_m)}{L^3}}=\underline{2.67\times10^{-6}s^{-1}}\quad\cdots\cdots(2)$$

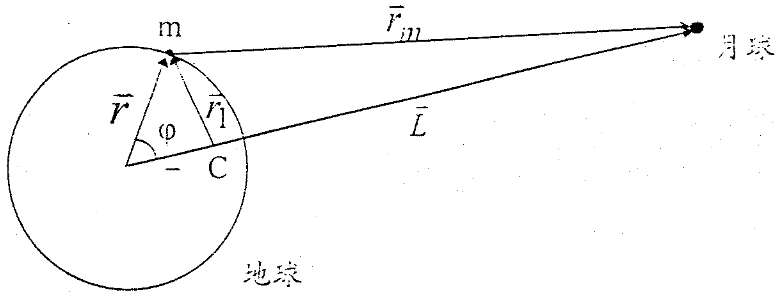
$$週期=\frac{2\pi}{\omega}=27.2天$$

(b) 就地球的座標系而言，地球液體表面上的一質點 m 所具有的三種位能分述如下：

(1) 由於轉動而有的離心位能：$\underline{-\frac{1}{2}m\,\omega^2 r_1^2}$，式中 r_1 是質點 m 與質心 C 之間的距離，此位能是源自於離心力 $m\,\omega^2 r_1$（方向往外離開 C）。

(2) 來自於地球的引力位能：$\underline{-\frac{GmM}{r}}$，式中 r 爲質點 m 與地心之間的距離。

(3) 來自於月球的引力位能：$-\dfrac{GmM_m}{r_m}$，式中r_m為質點m與月心之間的距離。



上圖中的平面，通過C點並與地球的自轉軸垂直，質點m的極座標為(r, φ)。由圖中的三角關係可得：

$$r_1^2 = r^2 + \ell^2 - 2r\ell\cos\varphi$$

把前述三種位能總加，得：

$$V(\vec{r}) = -\frac{1}{2}m\omega^2(r^2 + \ell^2 - 2r\ell\cos\varphi) - \frac{GmM}{r} - \frac{GmM_m}{r_m} \quad \text{(3)}$$

式中$r_m = \sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr\cos\varphi} = L\sqrt{1 + (r/L)^2 - 2(r/L)\cos\varphi}$

(c) 令$\dfrac{r}{L} = a$，由於a很小，我們可用下列展開式：

$$\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\varphi}} \approx 1 + a\cos\varphi + \frac{1}{2}a^2(3\cos^2\varphi - 1)$$

將上式代入(3)式，可得：

$$\frac{V(r,\varphi)}{m} \approx -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - \frac{GM}{r} - \frac{GM_m r^2}{2L^3}(3\cos^2\varphi - 1) + \text{常數} \quad \text{(4)}$$

上式中，常數$= -\left(\dfrac{1}{2}\omega^2\ell^2 + \dfrac{GM_m}{L}\right)$，就位能而言，常數項可以捨去不計；在計算過程中應用了(2)式，$\omega^2\ell = GM_m/L^2$。

按題意，地球液體表面形狀之方程式寫成為：

$$r(\varphi) = R + h(\varphi)$$

由於h遠小於R，我們可利用下面的近似式：

$$r^2 = R^2 + 2Rh + h^2 \approx R^2 + 2Rh$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R+h} \approx \frac{1}{R}\left(1-\frac{h}{R}\right)=\frac{1}{R}-\frac{h}{R^2}$$

將這兩近似式以及（2）式，代入（4）式，可得：

$$\frac{V(r,\varphi)}{m} \approx -\frac{G(M+M_m)R}{L^3}h+\frac{GM}{R^2}h-\frac{GM_m r^2}{2L^3}(3cos^2\varphi-1)+\text{常數} \quad \ldots(5)$$

上式中，常數 $=-\left[\dfrac{G(M+M_m)R^2}{2L^3}+\dfrac{GM}{R}\right]$，可再捨去不計。

在（5）式右邊首二項之比值爲 $\dfrac{(M+Mm)}{M}\left(\dfrac{R}{L}\right)^3 \approx 10^{-5}$，因此第一項可忽略不計。

（5）式可改寫爲：

$$\frac{V(r,\varphi)}{m} \approx \frac{GM}{R^2}h-\frac{GM_m r^2}{2L^3}(3cos^2\varphi-1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

按題設地球液體表面的形狀是靜態的，因此液體表面切線方向上的淨力爲0，也就是說液體表面爲一等位能面，即液面上各個質點皆有相同的位能，所以 $V(r,\varphi)$ 爲一常數，（6）式可寫爲：

$$h \approx \frac{M_m r^2 R^2}{2ML^3}\left(3cos^2\varphi-1\right)+h_o$$

式中 爲一常數。由於 r 和 R 幾乎相等，上式可改寫成：

$$h \approx \frac{M_m R^4}{2ML^3}\left(3cos^2\varphi-1\right)+h_o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

當 $\varphi=0$ 或 π 時，即在地心和月心的連線方向上，h 有極大値 $h_{max} \approx \dfrac{MR^4}{ML^3}+h_o$。
當 $\varphi=\pi/2$ 或 $3\pi/2$ 時，即在垂直於地心和月心的連線方向上，h 有極小値 $h_{min} \approx -\dfrac{MR^4}{2ML^3}+h_o$。所以漲潮和落潮的高度差爲：

$$\underline{\Delta h=h_{max}-h_{min} \approx \frac{3M_m R^4}{2ML^3}=0.54m}$$

評分標準：（本題總計10分）

（a）2 分　　（b）3 分　　（c）5 分