

中學數學挑戰徵答題

設計者：通訊解題發掘數學資優生研究小組

本期徵答截止日期：民國85年12月6日；相關參考解答將刊於科學教育月刊第196期

問題編號

1006

設 M 為直角三角形 ABC 的一腰 \overline{CA} 的中點， $\angle C$ 為直角。自 C 引中線 \overline{BM} 的垂線交斜邊 \overline{AB} 於 D ，且 $\angle AMD < 90^\circ$ 。試求使 $\angle AMD \geq \angle BMC$ 的充要條件（以 \overline{AC} 、 \overline{BC} 兩邊長的關係表之）。

問題編號

1007

設 $\triangle ABC$ 的三邊 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CA} 成等差數列， O 與 I 分別為 $\triangle ABC$ 的外心與內心。設 $\angle BAC$ 的外角平分線交 $\triangle ABC$ 的外接圓於 E 。試證 $OI \parallel \frac{1}{2} \overline{AE}$ 。

問題編號

1008

(1) 設 a, b 都是大於1的實數，試確定 $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1}$ 的最小值。

(2) 設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 為 n 個均大於1的實數， $n \geq 2$ 。

試確定 $\frac{a_1^2}{a_2-1} + \frac{a_2^2}{a_3-1} + \frac{a_3^2}{a_4-1} + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{a_n-1} + \frac{a_n^2}{a_1-1}$ 的最小值。

問題編號

1009

設數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ ，依下列規則定義： $a_1 = a_2 = 2$ ，

且 $a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 4}{a_{n-2}}$ ， $n \geq 3$ 。試證：此數列的每一項 a_n 都是偶數。

問題編號

1010

有一 8×8 小方格的棋盤。將此棋盤各小方格依序編號，其號碼分別以 $1, 2, \dots, 64$ 記之。除編號7的小方格外，每一小方格各放一枚棋子，此時我們稱之為初始狀態。接著我們對小方格上的棋子施行“操作”，每次“操作”是任意將棋盤上的一顆棋子移放在棋盤上的空格上，此種操作繼續作下去，直到空格的編號為7時，操作停止。（這時，操作共進行了 L 次， $L \geq 2$ ）當操作停止時，設初始狀態在編號為 k 的格子上的棋子，最後所在的格子的編號為 L_k ，其中 $k = 1, 2, \dots, 64$ ，但 $k \neq 7$ （這時候 $k = 7$ 的格子上沒有棋子）。

(1) 試證： $\sum_{k=1, k \neq 7}^{64} |L_k - k| \leq 1996$ ；

(2)找出等號成立的一種移法(即寫出棋子移動的方法)。

註：(1)徵答者在寄出答案前請自留影印本。

(2)本徵答題之相關資訊請參閱本刊第192期，第69~71頁。

(3)徵答題及其相關資訊已出現於WWW網路上，位址：

<http://www.math.ntnu.edu.tw>

中學數學挑戰徵答題規則

- 1.請寫姓名、徵答題號、就讀學校、班級、數學指導老師、聯絡電話地址等，寄回臺北市汀州路四段八十八號國立台灣師範大學科學教育中心科教月刊編輯小組轉。
- 2.徵答回函期限截止，前務請自己思考作答，避免與同學討論或請教師長；但必要時可自己找參考資料研究。
- 3.徵答題可能有多種解題方案，盡可能找出較佳方法，說理盡量寫明；答題品質較優的解答方案將發布解答者之姓名、就讀學校，關解答及輔導手冊，內容詳實，以充分協助增長數學學習能力並適時推薦參加國內外數理競賽研習活動。
- 4.擔任數理科之教師或寄回徵答題之徵答者可利用電話、郵寄或傳真，提問相關數理科疑難教學問題，電話無人接聽時自行留言(包括姓名、聯絡電話或地址、疑難問題編號)，傳真時亦同，研究小組接到後將及早尋找適當專家答覆，必要時將同時刊登於科教月刊以擴大影響層面。《本期聯絡電話為(02)9316273轉318，傳真(02)9327187，洽歐李芳欣助理。》
- 5.答題答案紙張規格以A4為準，請參考下面的格式書寫：

通訊解題發掘數學資優生並輔導培養競賽能力研究 中學數學挑戰徵答題答案紙

徵答題號： _____ 數學指導老師： _____
學校： _____ 年級： _____ 班別： _____
姓名： _____ 聯絡電話： () _____
地址： _____

以下作答：(亦可簡要寫出解題後之感想或心得)