

# 中學數學挑戰徵答題

設計者：通訊解題發掘數學資優生研究小組

♣ 本期徵答截止日期：民國85年11月6日；相關參考解答將刊於科學教育月刊第195期

問題編號  
1001

(1)  $\triangle ABC$  中， $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  的對邊長依次為  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，如果  $\angle B = 2\angle C$ ，則  $b^2 = c(a+c)$ 。試證之。

(2) 設上述  $\triangle ABC$  的三邊長為三個連續整數，試求所有滿足此條件的三角形。

問題編號  
1002

設  $A_n = 2786^n + 2597^n - 2801^n - 2497^n$ ，試\*確定所有正整數  $n$ ，使 85 可整除  $A_n$ 。

問題編號  
1003

證明：有無窮多的正整數  $n$ ，滿足  $n \mid 2^n + 1$ 。

問題編號  
1004

20 個同學在草地上圍成一圈開營火晚會，有足量的巧克力糖給他們當點心。（以粒為單位，可以吃任意多粒。）晚會結束時，統計一下每個人吃的數量，發現不論每個人吃了多少個，總有一些座位連在一起的人（可能一個或可含全部），他們吃的數量和為 20 的倍數，為什麼？

問題編號  
1005

設  $a_1, a_2, \dots, a_n$  都是正數，且  $\sum_{j=1}^n a_j \leq n$ ；

試\*確定所有的正整數  $n$ ，使得下列不等式恆成立：

$$\sum_{j=1}^n \frac{a_j}{1+a_j^2} \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{1+a_j}。$$

註：(1) 問題編號 1002、1005 中 (\*) 「確定」意指找出並應說明理由。

(2) 本徵答題係依通訊解題發掘數學資優生並輔導培養競賽能力研究計畫的目標而設計，有關其相關事項請參閱本刊第 192 期，第 69-71 頁。

(3) 本期徵答題係配合高一數學進度而設計，有些問題可利用鴿籠原理來求解，有關鴿籠原理可參考數學家的眼光第 86 頁，（九章出版社，張景中著）。

(4) 徵答題及其解答等相關資訊即將出現於 WWW 網路上，位址：<http://www.math.ntnu.edu.tw>