1996年第37屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析

陳昭地(*)、朱亮儒(*)、許志農(*)、陳創義(*)
柳賢(**)、黃永裕(***)、全任重(****)
(*)國立台灣師範大學數學系
(**)國立高雄師範大學數學系
(***)國立成功大學數學系
(****)國立清華大學數學系

前　言

國際數學奧林匹亞競賽(IMO)試題源自主辦國以外各參與國在接受邀請繳交試題期限內提交0～6道題（陳昭地，民81年、民82年），再由主辦國試題委員會研究選出24～30題預選題，分屬代數、幾何、組合數學、數論、等不同領域，經由各國領隊組成之主試委員會修訂票選出6道題，依主題內容及易中難層次安排每天3道題的二份試題。今年的試題，是先由主辦國印度之試題委員會從各國所提供的一百多道試題中研究選出30道，含代數、幾何、數論和組合數學等不同難度的試題及參考解答。再由主試委員會，經過二天六次會議研究票選出一道代數題，二道幾何題，一道數論和二道組合數學題。本文的目的在於針對今年七月我國代表團所翻譯成的中文版IMO 6道試題提供參考解答、評析解題重點，且就我國六位學生代表答題概況及本屆75個參與國424位學生代表得分統計加以比較評析，以供國內相關專家學者、數學教師等輔導數學資優化之研究應用參考。

一、第37屆國際數學奧林匹亞競賽試題

第一天

1996年7月10日

考試時間：45小時　　　　Version: Chinese

China Taipei (Taiwan)

1. 設ABCD為一長、寬分別是$\overline{AB}=20$，$\overline{BC}=12$的長方形板。將此長方形板分割為

20×12個格子狀的單位小方格。設γ爲一個給定的正整數；一個銅幣在此板上每移動一次的規則如下：

銅幣可從一方格內移動到另一個小方格內的充分且必要的條件是這兩個小方格的中心點之距離爲$\sqrt{\gamma}$。

我們的目標是要把一個位在含頂點A的小方格內之銅幣經若干次移動後到達含頂點B的小方格內。

(a) 證明：當γ是2的倍數或3的倍數時，此目標皆無法達成。

(b) 證明：當$\gamma = 73$時，此目標可以達成。

(c) 當$\gamma = 97$時，試問此目標是否可達成？

2. 設P爲$\triangle ABC$內部的一點且$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$。令D、E分別爲$\triangle APB$與$\triangle APC$的內心。證明：AP,BC與CE三線共點。

3. 設$S = \{0,1,2,3...\}$爲所有非負整數所成的集合。試找出所有由S對應到S本身且滿足下列條件的函數f：

若$m,n \in S$，則$f(m+f(n)) = f(f(m)) + f(n)$.

・每題7分

第二天

1996年7月11日

考試時間：4.5小時

Version: Chinese

China-Taipei (Taiwan)

4. 考慮所有的正整數a,b使得$15a + 16b$及$16a - 15b$都是正整數的平方。試找出這些平方數的最小值。

5. 設ABCDEF爲一凸六邊形且AB平行於ED，BC平行於FE，CD平行於AF。令RA，RC，RE依序表示$\triangle FAB$、$\triangle BCD$、$\triangle DEF$的外接圓之半徑，且令p 表示該六邊形的周長。證明：

RA,

Rc

$$RA + RC + RE \geqq \frac{P}{2}$$

6. 設n,p,q都是正整數且$n > p + q$。令x_0、$x_1 \dots x_n$都是整數且滿足下列的條件：

(a) $x_0 = x_n = 0$；

(b) 對每一整數$i (1 \leqq i \leqq n)$

或者有$x_i - x_{i-1} = p$或者有$x_i - x_{i-1} = -q$。

證明：存在一組標號$(i,j),i<j$且$(i,j)\neq(0,n)$，使得$x_i=x_j$。

・每題7分

二、第37屆國際數學奧林匹亞競賽成績統計

根據主辦單位確認公佈之第37屆75個參國共計424位競賽代表成績，參考前屆分析方式（陳昭地，民81年、民82年），列表如下，以供試題解答分析之參考。

表1　第37屆IMO全部參與競試學生之成績統計表
總人數424人

項目＼題次	1	2	3	4	5	6	總計
平均得分	3.19	2.05	2.40	2.11	0.50	2.25	12.46
得分率	0.46	0.29	0.34	0.30	0.07	0.32	0.30
標準差	2.22	2.74	2.26	2.74	1.16	2.90	9.55
變異係數	70%	134%	94%	130%	232%	129%	77%
難度指數	0.48	0.47	0.47	0.47	0.14	0.50	
鑑別指數	0.81	0.94	0.78	0.94	0.27	0.99	

表2　金牌、銀牌、銅牌及未得獎分組成績統計表
表2(a)　金牌獎（人數35,成績≧28）

項目＼題次	1	2	3	4	5	6	總計
平均得分	5.86	6.31	6.31	6.43	1.69	6.37	32.97
得分率	0.84	0.90	0.90	0.92	0.24	0.91	79%
標準差	1.70	1.69	1.43	1.74	2.17	1.66	3.46
變異係數	29%	27%	23%	27%	129%	26%	104%

表2(b)　銀牌獎（人數66,28＞成績≧20）

項目＼題次	1	2	3	4	5	6	總計
平均得分	4.55	3.77	4.59	4.85	0.82	4.56	23.18
得分率	0.65	0.54	0.66	0.69	0.12	0.05	55%
標準差	1.95	3.09	1.93	2.74	1.07	2.93	2.35
變異係數	43%	82%	42%	57%	130%	64%	10%

表2(c) 銅牌獎（人數99,20＞成績≧12）

項目＼題次	1	2	3	4	5	6	總計
平均得分	3.78	2.47	2.64	2.02	0.61	3.32	14.84
得分率	0.54	0.35	0.38	0.29	0.09	0.47	35%
標準差	1.90	2.78	2.02	2.47	1.31	2.82	2.35
變異係數	50%	112%	77%	123%	216%	86%	16%

表2(d) 未得獎者（人數224,成績<12）

項目＼題次	1	2	3	4	5	6	總計
平均得分	2.10	0.67	1.04	0.67	0.17	0.44	5.04
得分率	0.30	0.10	0.15	0.10	0.02	0.06	0.12
標準差	1.80	1.36	0.87	1.29	0.61	1.18	3.04
變異係數	85%	204%	84%	192%	366%	269%	60%

表3 1996年第37屆國際數學奧林匹亞競試中華民國學生代表得分及成績統計表

姓名＼題次	1	2	3	4	5	6	總計	獎牌
張懷良	2	7	7	7	0	0	23	銀
陳佑駿	6	1	5	1	0	7	20	銀
胡裕華	4	7	2	2	0	1	16	銅
李卓穎	3	1	5	3	0	0	12	銅
林冠明	4	1	2	7	2	2	18	銅
吳柏樟	1	7	2	1	0	0	11	榮譽獎
總分	20	24	23	21	2	10	100	2銀3銅 1榮譽獎

表4 1996年第37屆國際數學奧林匹亞競試各題得分成績人數統計表

姓名＼題次	1	2	3	4	5	6
0	65	173	48	177	307	195
1	30	124	176	109	74	79
2	98	10	73	11	18	16
3	26	5	22	17	7	15
4	111	11	14	11	7	3
5	17	6	19	7	7	6
6	12	2	19	6	0	10
7	63	88	52	86	6	99
總人數	422	419	423	424	420	423

表5　1996年第37屆IMO前十名國家成績統計表

名次	國家	1		2		3		4		5		6		總計	
		總分	平均	總分	平均	總分	平均	總分	平均	總分	平均	總分	平均	總分	平均
1	羅馬它亞	23	3.83	39	6.50	37	6.17	42	7.00	16	2.67	30	5.00	187	31.17
2	美國	39	6.50	28	4.67	36	6.00	35	5.83	11	1.83	36	6.00	185	30.83
3	匈牙利	25	4.17	30	5.00	34	5.67	36	6.00	6	1.00	36	6.00	167	27.83
4	俄羅斯	28	4.67	36	6.00	33	5.50	36	6.00	5	0.83	24	4.00	162	27.00
5	英國	39	6.50	14	2.33	35	5.83	39	6.50	4	0.67	30	5.00	161	26.83
6	中國大陸	34	5.67	42	7.00	32	5.33	36	6.00	0	0.00	16	2.67	160	26.67
7	越南	24	4.00	36	6.00	28	4.67	29	4.83	10	1.67	28	4.67	155	25.83
8	南韓	23	3.83	42	7.00	29	4.83	23	3.83	8	1.33	18	3.00	143	23.83
9	伊朗	19	3.80	29	5.80	25	5.00	22	4.40	11	2.20	35	7.00	141	28.20
10	德國	38	6.33	24	4.00	20	3.33	29	4.83	7	1.17	19	3.17	137	22.83
平均(60人)		4.93		5.43		5.23		5.52		1.34		4.65		27.10	
總平均(424人)		3.19		2.05		2.40		2.11		0.50		2.25		12.46	

註：從平均得分來看，由表1及表5可窺知第5道題是本屆題目難度最高且鑑別度頗差的一道題，而且跟最近五年比較（1991年第32屆～19 95年第36屆），本屆整體說來是難度最高的一屆，而第5道幾何不等式綜合題是最難的一道題；其餘5道題其難度相差不多均屬適中題，且其鑑別指數均稱理想。

三、試題詳解及評析

問題1：（芬蘭）

〔解答〕（試題委員會公布的解法）

將每一小方格對應到坐標平面上的格子點，令集合

$S=\{(i,j)\in Z^2；0\leqq i\leqq 19，0\leqq j\leqq 11\}$。

我們的目標是要將銅板由點A(0,0)按規定的移動規則（每次移動距離爲$\sqrt{\gamma}$）經由S中的點移動到點B(19,0)。顯然，由點(x,y)可一次移動到點$(x+a,y+b)$的充要條件是$a^2+b^2=\gamma$。

(a) 若γ是2的倍數，則a^2+b^2爲偶數，可推得$a+b$也是偶數，故可由點A(0,0)移動到的點(x,y)，其坐標和$x+y$必須與$0+0=0$有相同的奇偶性，即$x+y$必須是偶數。因此，無法到達目標點B(19,0)。若γ是3的倍數，則a^2+b^2爲3的倍數，因爲

$$x^2=0或1 \qquad (mod\ 3)$$

可推得a與b都是3的倍數，故可由點A(0,0)移動到的點(x,y)，其x與y坐標都必須是3的倍數，因此，無法到達目標點B(19,0)。

(b) 由$\gamma=73=8^2+3^2$知每次可移動的(a,b)型態有$\pm(8,3)$，$\pm(8,-3)$，$\pm(3,8)$及$\pm(3,-8)$等八種。

令α，β，γ，δ分別表示使用上述移動型式的次數，則得

$$\begin{cases} 8(\alpha+\beta)+3(\gamma+\delta)=19 \\ 3(\alpha-\beta)+8(\gamma-\delta)=0 \end{cases}$$

顯然

$$\begin{cases} (\alpha+\beta,\gamma+\delta)=(2,1) \\ (\alpha-\beta,\gamma-\delta)=(-8,3) \end{cases}\quad \text{滿足上述聯立方程組}(*)$$

解得　$\alpha=-3,\ \beta=5,\ \gamma=2,\ \delta=-1$，　以下是一條可行的路徑（共移動3次(-8,-3)，5次(8,-3)，2次(3,8)及1次(-3,8)）：

A(0,0)→(3,8)→(11,5)→(19,2)→(16,10)→(8,7)→(0,4)→(8,1)→(11,9)→(3,6)→(11,3)→B(19,0)

另外，也可考慮$\begin{cases} (\alpha+\beta,\gamma+\delta)=(2,1) \\ (\alpha-\beta,\gamma-\delta)=(8,-3) \end{cases}$　滿足聯立方程組(＊)

由此解得$\alpha=5,\ \beta=3,\ \gamma=1,\ \delta=2$, 以下也是一可行的路：

A(0,0)→(8,3)→(16,6)→(8,9)→(5,1)→(13,4)→(5,7)→(13,10)→(16,2)→(8,5)→(16,8)→B(19,0)

(c) 由於$\gamma=97=9^2+4^2$的表示法唯一，故每次移動只有下列型態之一：$(\pm9,\pm4)$、$(\pm4,\pm9)$

令

$S_1=\{(i,j)\in S；4\leqq j\leqq 7\}$　，　$S_2=S\setminus S_1$

由觀察顯然知型態$(\pm9,\pm4)$的移動會把銅板由S_1的點移到S_2的點上或由S_2的點移到S_1的點上，而型態$(\pm4,\pm9)$的移動會把銅板由S_2的點移到S_2的點上（註明：這種型態的移動不會把銅板由S_1的點移到S_1的點上）。由於型態$(\pm9,\pm4)$的移動會改變X坐標的奇偶性，故欲從A(0,0)移動到B(19,0)，就必須有奇數次這種型態的移動，由於起點A(0,0)在S_2中，故奇數次這類型的移動後的位置必在S_1中，但點B(19, 0)在S_2中，故目標無法達成。

評析：

1. 本題為芬蘭設計提供，為一組合的題目，主試委員會預估為簡易題，考試結果在424位參賽者中，有63位(14.8％)得滿分，其中有22位最後得到金牌，也有65位(15.3％)得0分。全體得分的平均值為3.19分，得分率0.46，難度指數0.48，屬本次六道試題中難度較易者，而其鑑別指數高達0.81。所有獲得金牌的35位選手在本題的平均得分數為5.86分，而拿到銀牌的66位選手得分之平均值為4.55分。我國6位選手得分之平均值為3.33分，顯然，平常訓練仍需特別加強這類型的題目，才能坐銀求金，以提升我國的名次。

2. 解題評分重點：

本題主要是利用奇偶性分析與基本數論的同餘技巧來簡化問題，觀察其可移動的一般規律，再作適當的分類與分析其可行性。

(1)能正確的分析(a)小題中每一種情況($2|\gamma$ 、$3|\gamma$)各可得1分。

(2)能列式分析找出一組滿足(b)小題的數字並說明或列出一條可行的路徑，可得2分，若只有一組數字但沒有說明其可行性，均不給分。

(3)能詳細解析$\gamma = 97$是不可能達成目標，可得3分，若只猜對結論，不給分。

3. 討論：

(1)在424位參賽學生中，本題得滿分7分的有63位，其中22位是金牌得主，我國六位代表的得分依序是2,6,4,3,4,1共20分，表現不如預期的結果。

(2)本題分三個小題，(a)與(b)部分屬於基本數論的同餘概念一般學生只要細心作答應可拿到此部分的分數（4分），但我國代表中有三位未達此分數，相當可惜。至於(c)的部分，有很多種不同的方法分析其可能性，必須有較強的觀察能力與分析背景，才能在這部分拿到分數，其中陳佑駿採用矛盾證明法，假設有一條可行的路徑而導出矛盾的結果，但在簡化的過程中不夠嚴密而被扣了一分，是我國選手中在本題表現最佳的一位，而吳柏樟在(a)部分處理γ為3倍數的情況時考慮mod 4（應為mod 3）的同餘，以致於分析過程不正確而喪失得銅牌的機會，非常可惜。

問題2：（加拿大）

〔解一〕（試題委員會公布的解法）

（見圖2a）

引理：令X,Y,Z分別為從P到BC,CA及AB的垂足，則(i)$YZ = PA\sin A$，

(ii)$\angle YXZ = \angle BPC - \angle A$。

上述引理的結果，很容易可由三個共圓的四邊形AZPY、BXPZ及CYPX看出來。

令BD及CE分別交AP於Q及R.由角平分線定理得

AQ/QP = AB/BP，AR/RP = AC/CP。

欲證Q，R爲相同的點，只需證明AB/BP = AC/CP，而

$$\frac{AB}{BP}=\frac{AC}{CP} \Leftrightarrow AB \cdot CP=AC \cdot BP \Leftrightarrow CP \cdot \sin C=BP \cdot \sin B$$

$$\Leftrightarrow XY=XZ \quad \text{（利用引理）}$$

又由∠APB − ∠ACB = ∠APC − ∠ABC及引理知∠XZY = ∠XYZ，所以得到XY = XZ。

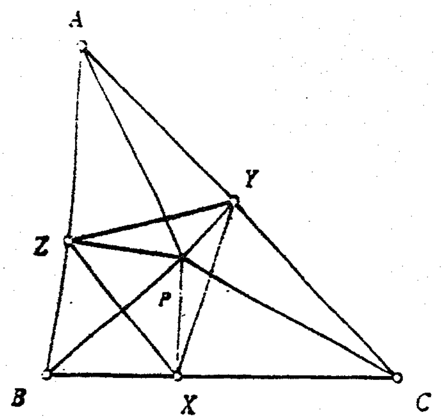


圖2a

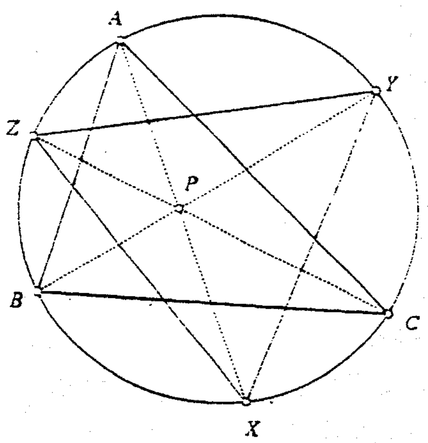


圖2b

〔解二〕（試題委員會公布的另一解法）

（見圖2b）

此問題需證明∠ABP與∠ACP的內角平分線相交的點落在AP上。令Γ爲△ABC的外接圓，且令AP,BP,CP分別交Γ於X,Y,Z。題目所給的條件∠APB − ∠ACB = ∠APC − ∠ABC與∠PAC + ∠PBC = ∠PAB + ∠PCB等價，它可簡化爲∠XZY = ∠XYZ，因此XY = XZ。現在△BPC ~ △ZPY，所以BC/ZY = BP/ZP = PC/PY。令BP · PY = κ，則PC · ZP = κ = AP · AX。從關係式

$$\frac{BC}{ZY}=\frac{BP}{ZP}=\frac{BP \cdot PC}{\kappa},$$

可導出

$$YZ=\kappa\left(\frac{BC}{BP\cdot PC}\right)$$

同理

$$XY=\kappa\left(\frac{AB}{AP\cdot PB}\right)\quad ,XZ=\kappa\left(\frac{AC}{AP\cdot PC}\right)$$

因爲XY＝XZ，所以

$$\frac{AB}{BP}=\frac{AC}{PC},$$

即BA / BP＝CA / CP。因此∠ABP與∠ACP的內角平分線有相同的比例分割線段AP，所以它們在AP上相交。

評析：

1. 本題爲加拿大設計提供，爲一平面幾何的題目，主試委員會預估爲中難題，考試結果在424位參賽者中，有88位(20.8％)得滿分，其中有28位最後得到金牌，也有173位(40.8％)得0分。全體得分的平均值爲2.05分，得分率0.29，難度指數0.47，屬本次六道試題中難度中等者，而其鑑別指數更高達0.94。所有獲得金牌的35位選手在本題的平均得分數爲6.31分，而拿到銀牌的66位選手得分之平均值爲3.77分，我國6位選手得分之平均值爲4.00分。顯然，以我國學生在幾何上的專長得到這個分數是偏低的。

2. 解題評分重點：

⑴角平分線定理的應用。

⑵角度差相等轉換成另一三角形的等腰性質。

⑶四點共圓的條件。

⑷三角形的正弦定理或圓的冪定理的應用。

⑸綜合分析法。

⑹導出原問題即要證明BA / BP＝CA / CP可得1分。

⑺證出上式比例式等價於XY＝XZ可得3分

⑻用已知條件證出XY＝XZ可再得3分。

3. 討論：

⑴我國六位學生代表，有三位在這題得滿分，另三位各得1分，不甚理想。

⑵幾何題原爲我國較擅長，致勝取分的關鍵。第一天此題應全得滿分而沒有全得滿分，應爲影響個人得更好的獎牌及團隊總分的主要關鍵題。

(3)此題得滿分的三位同學，其作法皆不相同，胡裕華的作法爲解1的作法，張懷良的作法是作△BPC外接圓，利用所給條件得出BP / CP = AB / AC，吳柏樟是採用相似旋轉的觀念，利用所給條件得出BP / CP = AB / AC。然後他們再利用內角平分線定理得出結果。

(4)李卓穎此題轉化爲三角問題，結果在那裡被卡住出不來，浪費了很多時間，可惜！

問題3：（羅馬尼亞）

〔解答〕（試題委員會公布的解法）

於所給條件：

(1) $f(m+f(n))=f(f(m))+f(n),\ m,n\in S$

中，令$m=n=0$，得

(2) $f(0)=0$

再於(1)中令$m=0$並利用(2)，推得

(3) $f(f(n))=f(n)$

因此，由條件(1)可推出下列條件：

(4) $\begin{cases} f(m+f(n))=f(m)+f(n) \\ f(0)=0 \end{cases}$

反之，若條件(4)成立，則(1)式亦必成立。所以條件(1)相當於條件(4)。若f爲零函數，顯然滿足條件(1)（或(4)）。因此零函數爲函數方程式(1)之一解。底下考慮f不是零函數的情形，此時由(3)式推知f有異於0之固定點，令a表這些異於0的固定點中之最小者。如果a = 1，則由(4)式及歸納法推得：

(5) $f(n)=n,\ \forall n\in S$

代回驗算，若$f(n)=n$，$\forall\ n\in\ S$，則f滿足(1)式。因此恆等函數：$f(n)=n$，$\forall n\in S$亦爲方程式(1)之一解。此外，若$a>1$，則由歸納法易得：

(6) $f(ka)=ka$，$\forall k\in N$

其次，設$b\in N$爲f之任一固定點，將b表爲$b=aq+r$，其中$q\in S$，$0\leqq r<a$，則

$aq+r=b=f(b)=f(r+f(aq))=f(r)+f(aq)=f(r)+aq$

因此$f(r)=r$。但a爲異於0之最小固定點，所以$r=0$。亦即若$b\in N$ 爲f之任一固定點，則b必，爲a的倍數。

(7) $b=ka$，$k\in N$

綜合(2)，(6)及(7)得知集合 $\{f(n):n\in S\}$ 爲f的所有固定點之集合。特別地，$\forall i\in\{0,1,\ldots,a-1\}$ 必存在$n_i\in S$使得$f(i)=an_i$，其中，顯然$n_0=0$，這樣，對任意$n\in S$，將n 表爲$n=ka+i$，$(k\in S，0\leqq i<a)$，則得

(8) $f(n)=f(i+ka)=f(i+f(ka))$

$=f(i)+ka=an_i+ka=(n_i+k)a$

反之，若f形如(8)式，則f必滿足(4)式：

令$m=ka+i$，$n=la+j$，$0\leqq i$，$j<a$，則

$f(m+f(n))=f(ka+i+f(la+j))=f((k+l\_nj)a+i)$

$=(k+l+nj+ni)a=f(m)+f(n)$

因此，若f滿足(1)式且不爲零函數，則f必呈底下形式：

取$a\in N$及$n_0=0$，$n_1,\ldots,n_{a-1}$ S則

$f(n)=([\frac{n}{a}]+n_i)a,\quad n\in S$

評析：

1. 本題爲羅馬尼亞設計提供，爲一代數（函數方程）的題目，主試委員會預估爲中難題，考試結果在424位參賽者中，有52位(12.3％)得滿分，其中有27位最後得到金牌，也有48位(11.3％)得0分。全體得分的平均值爲2.40分，得分率0.34，難度指數0.47，屬本次六道試題中難度中等者，而其鑑別指數爲0.78，也相當高。所有獲得金牌的35 位選手在本題的平均得分數爲6.35分，而拿到銀牌的66位選手得分之平均值爲4.59分，我國6位選手得分之平均值爲3.83分，顯然，平常訓練仍需特別加強這種函數方程的題目，以提升成績。

2. 解題評分重點：

(1)證得$f(0)=0$及$f(f(n))=f(n)\ \forall\ n\in S$者，（或說明出$f$可爲零函數及恆等函數者）得1分。

(2)證得f之任意固定點爲其異於0之最小固定點的倍數者得2分。

(3)證得f之值可由$f(1)$，$f(2)\ldots f(a-1)$所確定得3分。

(4)寫出f之通式並驗證此通式爲方程式之解得1分

備註：任意經由觀察所得滿足(1)式之f至多給1分

3. 討論：

(1)我國學生在此題之得分情形爲：1人得7分2人得5分；其餘3人各得2分。

得5分之同學雖能做到f之值由f(0),f(1),....,f(a-1)所確定，但未能明確寫出f之通式且在推演過程中稍有疏漏，一步之差而被扣2分，殊爲可惜。

得2分之同學都推得零函數及恆等函數爲所給函數方程之解，也都觀察到f有固定點，但未思及從最小的固定點著手，因而陷於泥沼，得不出結論，失分太多。

⑵一般而言，這題並不是一個艱深的題目，而同學未能得高分，或許因爲同學們在第一題組合題上浪費太多時間，而無足夠的時間來解答此題。

問題4：（俄羅斯）

〔解答〕（試題委員會公布的解法）

設 $\begin{cases} 15a+16b=r^2 \\ 16a-15b=s^2 \end{cases}$

其中r及s爲自然數則我們有

$$r^4+S^4=(15^2+16^2)(a^2+b^2)=481(a^2+b^2)$$

因爲481＝13×37，所以模13及37得到

$$r^4+s^4\equiv 0\ (mod\ \ 13)\text{及}r^4+s^4\equiv 0\ (mod\ \ 37)$$

由（整數）$^4\equiv 0,1,3,9\ (mod\ \ 13)$

得到

$$\begin{cases} r^4\equiv 0,1,3,9\ (mod 13) \\ S^4\equiv 0,1,3,9\ (mod 13) \end{cases}$$

$$\Rightarrow r^4+S^4\equiv 0,1,2,3,4,\cancel{5},6,9,10,12\ (mod 13)$$

因爲$r^4+s^4\equiv 0\ (mod\ \ 13)$，由上觀察，唯一的可能解爲

$$\begin{cases} r^4\equiv 0\ (mod\ \ 13) \\ S^4\equiv 0\ (mod\ \ 13) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r\equiv 0\ (mod\ \ 13) \\ S\equiv 0\ (mod\ \ 13)\text{......................................}(1) \end{cases}$$

利用同樣的方法，得到

$$\begin{cases} r\equiv 0\ (mod\ \ 37) \\ S\equiv 0\ (mod\ \ 37) \end{cases}$$

綜合(1)及(2)得到

$$\begin{cases} r\equiv 0\ (mod\ \ 481) \\ S\equiv 0\ (mod\ \ 481) \end{cases}$$

又取 $\begin{cases} a=481\cdot 31 \\ b=481 \end{cases}$

得到

$$\begin{cases} 15a+16b=481^2 \\ 16a-15b=481^2 \end{cases}$$

所以481^2是所求的最小值。

評析：

1. 本題爲俄羅斯設計提供，爲一數論的題目，主試委員會預估爲簡易題，考試結果在424位參賽者中，有86位(20.3％)得滿分，其中有31位最後得到金牌，也有177位(41.7％)得0分，全體得分的平均值爲2.11分，得分率0.30，難度指數0.47，屬本次六道試題中難度中等者，而其鑑別指數爲0.94，也相當高，所有獲得金牌的35位選手在本題的平均得分數爲6.43分，而拿到銀牌的66位選手得分之平均值爲4.85分，我國6位選手得分之平均值爲3.50分，在6道試題中得分最高，但仍有部分選手沒有達到基本分數的要求，尙需加強訓練。

2. 解題評分重點：

(1)證出$r^4+s^4=481(a^2+b^2)$或得出關鍵數字481得1分。

(2)證出$r\equiv s\equiv 0\ (mod\ 13)$得2分

(3)證出$r\equiv s\equiv 0\ (mod\ 37)$得2分

(4)觀察到$r,s\geqq 481$得1分

(5)證得$r=s=481$可行再得1分。

3. 討論：

這是一道標準的數論題（同餘的應用），我國六位學生中，有二位得滿分(7分)，其餘四位分別得3,2,1,1分。總計得21分，在這次六題中，算是表現不錯的。這題數論題是此次競賽中的第三道難題（難度僅次於第五題幾何不等式題及第二題幾何題），各國學生第四題的平均得分爲2.11；我國六位學生的平均得分是3.50分，顯見我們今年在數論題的表現還算正常。

問題5：（亞美尼亞）

〔解答〕（試題委員會公布的解法）

令a,b,c,d,e,f分別爲邊AB,BC,CD,DE,EF及FA的長度。由此六邊形對邊相互平行，可得出其對角相等（∠A＝∠D，∠B＝∠E，∠C＝∠F)。過A、D畫垂線

使得：AP ⊥ BC，AS ⊥ EF，DQ ⊥ BC，DR ⊥ EF。則PQRS爲一矩形且AP ≧ PS = QR，因此2BF ≧ PS + QR。

所以

$$2BF \geqq (a\ \sin\ B+f\ \sin\ C)+(c\ \sin\ C+d\ \sin\ B) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

同理

$$2DB \geqq (c\ \sin\ A+b\ \sin\ B)+(e\ \sin\ B+f\ \sin\ A),$$

$$2FD \geqq (e\ \sin\ C+d\ \sin\ A)+(a\ \sin\ A+b\ \sin\ C),$$

另外，$\triangle FAB$，$\triangle BCD$，$\triangle DEF$的外接圓半徑與BF，DB，FD的關係爲

$$R_A=\frac{BF}{2sinA}\ ,\quad R_C=\frac{DB}{2sinC}\ ,\quad R_E=\frac{FD}{2sinB}$$

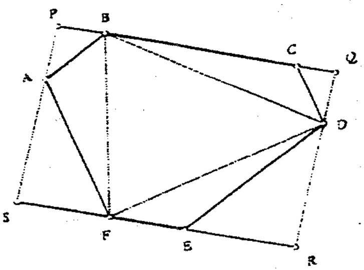
因此得出

$$4(R_A+R_C+R_B) \geqq a\left(\frac{sinB}{sinA}+\frac{sinA}{sinB}\right)+b\left(\frac{sinB}{sinC}+\frac{sinC}{sinB}\right)+c\left(\frac{sinC}{sinA}+\frac{sinA}{sinC}\right)$$

$$+d\left(\frac{sinB}{sinA}+\frac{sinA}{sinB}\right)+e\left(\frac{sinB}{sinC}+\frac{sinC}{sinB}\right)+f\left(\frac{sinC}{sinA}+\frac{sinA}{sinC}\right)$$

$$\geqq 2(a+b+c+d+e+f)=2p$$

所以$R_A+R_C+R_E \geqq \frac{P}{2}$，且等號成立的充要條件爲∠A = ∠B = ∠C 及BF ⊥ BC，.... 即ABCDEF爲正六邊形。



評析：

1. 本題爲亞美尼亞設計提供，爲一幾何不等式的題目，主試委員會預估爲中難題，考試結果在424位參賽者中，僅有6位(1.4％)得滿分，其中有3位最後得到金牌，也有307位(72.4％)得0分。全體得分的平均值爲0.5分，得分率0.07，難度指數

0.14，屬本次六道試題中難度較難者，而其鑑別指數爲0.27，也略偏低。所有獲得金牌35位選手在本題的平均得分數爲1.69分，而拿到銀牌的66位選手得分之平均值爲0. 82分，我國6位選手得分之平均值爲0.33分。顯然，平常訓練仍需特別加強這類型的題目，尤其是需要特別輔助的幾何題型。

2.解題評分重點：

(1)向外作此六邊形的外接矩形爲解此題的關鍵。

(2)外接圓直徑與三角形的正弦定理。

(3)一般簡單不等式的應用。

(4)證出正六邊形的特殊情況或祇將原不等式作代數等價的轉換都不給分。

(5)觀察出BF長度不小於兩平行線BC與FE之間的距離可得1分。

(6)導出(*)式可得3分。

(7)利用算術幾何不等式導出最後的結果再得3分。

(8)證出一個或更多的有意義的特例最多只得1分。

3.討論：

(1)我國六位學生代表只有林冠明在此題得2分，其餘皆掛0，林冠明在此題是作對邊長度亦相等的特殊情形，比大會公佈做正六邊形特殊情形得1分還要廣一點，所以爭取到兩分。

(2)本題所用到的解題知識，都很簡單，我國選手都有，只是在作輔助圖的技巧，與一般習慣的作輔助圖技巧不同，沒有想到這樣的就連大陸隊在此題六位皆掛0，栽了勇斗，出乎大家的意料之外。

問題6：（法國）

〔解一〕（試題委員會公布的解法）

首先不失一般性，我們可令p與q互質，因爲若d爲p與q的最大公因數，則原問題等價於處理$p'=\frac{p}{d}$，$q'=\frac{q}{d}$, $x'_i=\frac{x_i}{d}$（其中p'與q'互質）的情形。

設有k個下標i滿足$x_i-x_{i-1}=p$，則剩餘的$n-k$個下標i滿足$x_i-x_{i-1}=-q$。由

$$0=x_n-x_0=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=kp-(n-k)q$$

得$kp=(n-k)q$。因p與q互質，故存在一正整數a使得$k=aq$且$n-k=ap$。依此可推得

$$p+q<n=k+(n-k)=a(p+q)$$

故$a>1$且n爲$p+q$的倍數。

現在對每一$i \in \{0,1,2,\ldots,n-p-q\}$，令$y_i = x_{i+p+q} - x_i$。因$n > p+q$，故至少有兩項這樣的$Y_i$，祇要能證明其中有一項$y_i = 0$，則可得$x_{i+p+q} = x_i$就可得證。再令

$$S_i = \{i+1,\ I=2,\ \ldots,\ i+p+q\}$$

若r表示集合S_i中下標j滿足$x_j - x_{j-1} = p$的個數，則S_i中下標j滿足$x_j - x_{j-1} = -q$的個數爲$p+q-r$。如此可得

$$y_i = \sum_{j \in Si} (x_j - x_{j-1}) = rp - (p+q-r)q = (p+q)(r-q)$$

故知每一y_i都是$p+q$的倍數。又由

$$y_{i+1} - y_i = (x_{i+p+q+1} - x_{i+p+q}) - (x_{i+1} - x_i)$$

及已知條件，可推得每一$y_{i+1} - y_i$的值爲0或$\pm(p+q)$。另一方面，因爲

$$y_0 + y_{p+q} + y_{2(p+q)} + \ldots + y_{n-p-q} = 0$$

故這些y_i不可能全正，也不可能全負。因此，在數列

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_{n-p-q}$$

中至少有兩個相鄰項不同號（或爲0）且它們的差是0或$\pm(p+q)$。因每一項y_i都是$p+q$的倍數，故此兩項中必有一項是0，由此得證。

〔解二〕（陳佑駿同學的作法）

第一部分導出n是$p+q$的倍數且只須考慮p與q是互質的情況之證明同上述試委會公布的解答相同。接著令$n = ks$，$k \geqq 2$，其中$s = p+q$。

因爲

$$(x_s - x_0) + (x_{2s} - x_s) + \ldots (x_{ks} - x_{(k-1)s}) = x_n - x_0 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

若有某一$i \in \{1,2,\ldots k\}$滿足$x_{is} = x_{(i-1)x}$ 則得證

若對每一$i \in \{1,2,\ldots k\}$，$x_{is} \neq x_{(i-1)s}$，則由(＊)式知

(i) 當$x_s - x_0 > 0$時，必有某一$r > 1$使得$x_{rs} - x_{(r-1)s} > 0$

(ii) 當$x_s - x_0 < 0$時，必有某一$r > 1$使得$x_{rs} - x_{(r-1)s} < 0$

不失一般性我們處理(i)的情況（因情況(ii)的證明類似）。

對每一$l \in \{0, s, 2s \ldots rs\}$，設數列

$$x_l,\ x_{l+1},\ x_{l+2},\ \ldots\ x_{l+s}$$

的相鄰項差爲p的有a_l個，而相鄰項差爲$(-q)$的有b_l個

則

$$x_{l+s} - x_l = \sum_{j=l+1}^{l+s} (x_j - x_{j-1}) = a_l P - b_l q$$

且

$$a_l+b_l=s=p+q$$

由$x_s-x_0>0$，可推得 $a_0>q$。再由$x_{rs}-x_{(r-1)s}<0$，可推得$a_{(r-1)s}<q$。

顯然，在非負整數數列

$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{(r-1)s}$ 中，任兩相鄰項的差是0,1或-1（因每一a_{j+1}之値是a_j，a_j+1或a_j-1），由於$a_0>q$，$a_{(r-1)s}<q$，故必有某一$m\in\{1,2,3,\ldots(r-1)s-1\}$使得$a_m=q$，此時$b_m=s-a_m=p+q-q=p$得

$$x_{m+s}-s_m=a_m\ p-b_m\ q=0$$

即$x_{m+s}=x_m$故得證

評析：

1. 本題爲法國設計提供，爲一組合（離散數學）的題目，主試委員會預估爲難題，考試結果在424位參賽者中，有99位(23.3％)得滿分，其中有29位最後得到金牌，也有195位(46％)得0分。全體得分的平均值爲2.25分，得分率0.32，難度指數0.50，屬本次六道試題中難度中等者，而其鑑別指數最高0.99。所有獲得金牌的35位選手在本題的平均得分數爲6.37分，而拿到銀牌的66位選手得分之平均值爲4.56分。我國6位選手得分之平均值爲1.67分，顯然，平常訓練仍需特別加強這類型的題目，才能坐銀求金，以提升我國的名次。

2. 解題評分重點：

將本題數列對映到數線上，可看出每次移動到下一項的走法，不是右移p步，就是左移q步。由於首項與末項相同，不難觀察出n爲p+q的倍數，此題爲離散型的中間值定理之一種變形。

(1)觀察出n是$p+q$的倍數且可考慮p與q互質之情況可得1分。

(2)導出每一y_i都是$p+1$的倍數或證明$x_i=x_j$的充要條件是$i-j$爲$p+q$的倍數可得2分。

(3)證出$y_{i+1}-y_i$之値是0，$p+q$或$-(p+q)$可獨立得1分，證出這些y_i不能同號可獨立得2分，最後導出某一$y_i=0$再得1分。

3. 討論：

(1)在424位參賽學生中，本題得滿分7分的有99位，其中29位是金牌得主，我國六位代表的得分依序是0,7,1,0,2,0共10分，表現不理想，中國大陸隊本題總分也祇有16，分都可能是因前一幾何題太難，而導致沒有太多時間來思考這道題。

反觀美國與韓國都有5名代表拿到滿分，這也是他們能名列前茅的原因之一。

(2)本題的主要解題技巧在我們平時的獨立研究題中也出現過，加上離散型的中間值問題也給學生訓練過，但在整個考試過程中，六位代表共沒有發現到本題是我們訓練教材的類似題，甚至如張懷良都沒有作答而喪失拿金牌的機會，令人婉惜，胡裕華導出n爲p+q的倍數而得1分，林冠明更進一步導出原題可僅考慮p與q互質的情況，並導出一個$x_i = x_j$的充要條件，但因計算過程中出現了嚴重的錯誤，以致於其等價的條件不正確而無法推出第(3)部分的結論，因而祇得到2分，無法得到更好的獎牌，相當可惜。

四、結論

從以上的成績統計及試題詳解與評析，我們綜合提出以下結論，以供參考：

1. 本屆六道試題領分屬組合，平面幾何，代數（函數方程），數論，幾何不等式及組合（數列）。尤其平面幾何與組合題更是近年來熱門的題目，這可從去年與今年的六道試題中，各都含有2題平面幾何與2 題組合題，看出這類型的題目是目前各國數學奧林匹亞競試的流行趨勢，短期內應不易有太大的變化。今年我國代表整體上對這類型題目的表現不如理想，因此將來集訓時應再加強這些領域的訓練與實作經驗。
2. 今年試題爲歷屆最難的一次，其中第5題幾何不等式最難，在424位參賽學生中僅有6位拿到滿分，而第6題離散型的中間值定理之變形題稍難，其餘四題難度適中，且每題都有一些基本的部分分數。由於今年的每一道題都設計一些較新穎的解題技巧，且大部分參賽學生尚未能適應這種新題型，以致造成全體成績大幅滑落（註明：去年全部參賽學生得分平均值爲18.95分，今年的平均值爲12.46分），另外，由於印度孟買當地環境飲食條件不佳造成參賽學生身心不舒服，也是影響考試成績的原因之一。因此，集訓時不僅要注重知識的涉獵，平時的體能訓練也是重要的。
3. 我國參賽的六位學生代表，計得二銀三銅一榮譽獎。總分100分，在75個參賽國中排名第二十名。除胡裕華同學的表現尚稱正常外，其餘五位代表的表現都有失常，使得成績無法達到預期的目標。如張懷良的第6題，陳佑駿與林冠明的第2題，李卓穎的第2、6題及吳柏樟的第3、4題等，這些類型的題目與技巧，他們平時也都訓練過，但缺乏夠份量的實作經驗而造成臨場的表現失常。因此，紓解學生的心理

壓力及增加實作的次數也是今後應特別重視的問題。

4. 今年我國的六位學生代表在代數與數論題（第3、4題）的表現尚稱穩定，而在組合與數論及數列的綜合題（第1、6題）上沒有把握住部分的基本分數，得分偏低，相當可惜。至於我國學生擅長的平面幾何題，由於難度偏高，在今年的兩題幾何題（第2、5題）中，六位代表共僅得26分，比去年的83分退步甚多。另外，我國學生對於分析思考的嚴謹性及作答的完整性仍嫌不足，計算過程也偶有錯誤，常易遭到扣分，應予檢討以謀策略，作爲將來訓練之參考。因爲金牌數的比率不能超過1/12，且參賽的各國學生高手如雲，欲得金牌就必須題題兼顧且作答要嚴謹完整，不可稍有失常，所以平常的訓練也就格外重要。希望將來能廣增相關領域的專家學者或教授的參與，協助訓練與輔導的工作，讓學生代表在身心各方面達到均衡，才能在成績的表現上有進一步的突破。

五、参考資料

1. 國立臺灣師範大學科學教育中心（民82），國際數學奧林匹亞（Ⅰ）：數理科奧林匹亞競賽專輯(二)。
2. 陳昭地（民82），一九九三年第三十四屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析，科學教育月刊第163期（82年10月），48～72。
3. 陳昭地（民83），一九九四年第三十五屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析，科學教育月刊第172期（83年9月），24～39。
4. 陳昭地等（民84），一九九五年第三十六屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析，（Ⅰ)(Ⅱ)，科學教育月刊第184期（84年11月），35～44，第185期（84年12月），33～43。
5. 陳昭地等（民85），中華民國參加一九九六年國際數學奧林匹亞計畫報告，第1～86頁。
6. 中華民國參加第37屆國際數學奧林匹亞競賽代表團，中華民國參加1995年第37屆國際數學奧林匹亞競賽簡報（85年 月）。
7. 37th IMO Programme (July 5-17, 1996, India)。
8. IMO 96 Exam Results (96 IMO Jury Committee)。
9. 第37屆IMO試題。
10. 37th IMO Solutions of Problems for Consideration by the International Jury (1996 India)。