Steiner-Lehmus定理的另一個證明

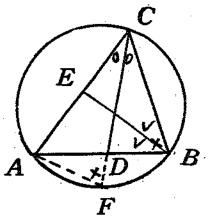
邱坤毅
省立台東高級中學

一、前　言

余進發老師在科學教育月刊189期37～40頁提出了Steiner-Lehmus 定理的四種證明，此篇文章對國中數學教師及程度較高的國中生助益良多。一般國中學生在學習平面幾何最困難的部份大抵是「輔助線」的作法，對教師而言，分析一條輔助線的產生也不是易事。本文對Steiner-Lehmus定理提供較爲直觀的證明，儘量以國中數學知識爲範疇，敬請余老師及諸位先進不吝指教。

二、本　文

在證明Steiner-Lehmus定理前，我們先證明兩個性質。



圖一　$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，$\overline{BC}=a$

性質1：見圖一，$\overline{CD}$爲$\angle C$的分角線，則

$$\overline{CD}^2=\overline{CA}\cdot\overline{CB}-\overline{AD}\cdot\overline{DB}$$

證明：1. 作外接圓

2. 延$\overrightarrow{CD}$交圓於F，$\because \angle AFC=\angle ABC$

$$\angle ACD=\angle DCB$$

$$\therefore \triangle AFC\backsim\triangle DBC$$

$$\overline{AC}:\overline{CF}=\overline{CD}:\overline{CB}$$

$$\Rightarrow \overline{AC}\cdot\overline{CB}=\overline{CF}\cdot\overline{CD}=(\overline{CD}+\overline{DF})\cdot\overline{CD}$$

$$\Rightarrow \overline{CD}^2=\overline{AC}\cdot\overline{CB}-\overline{DF}\cdot\overline{CD}=\overline{AC}\cdot\overline{CB}-\overline{AD}\cdot\overline{DB}$$

性質2：$\overline{CD}=\dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{(a+b)^2-c^2}$

證明：$\because \overline{CD}$爲分角線　$\therefore \overline{AD}:\overline{DB}=b:a$　又　$\overline{AD}+\overline{DB}=C$

得　$\overline{AD}=\dfrac{bc}{b+a}$，$\overline{DB}=\dfrac{ac}{b+a}$

由性質1知 $\overline{CD}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{CB} - \overline{AD} \cdot \overline{DB}$

得 $\overline{CD}^2 = ab - \dfrac{abc^2}{(b+a)^2} = \dfrac{ab[(a+b)^2 - c^2]}{(a+b)^2}$

即 $\overline{CD} = \dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{(a+b)^2 - c^2}$

另證：設$\overline{CD} = x$ ，$\angle ACD = \theta$（如圖一）

1. $a\triangle ACD + a\triangle BCD = a\triangle ABC$

$$\frac{1}{2}bx\sin\theta + \frac{1}{2}ax\sin\theta = \frac{1}{2}ba\sin 2\theta = ab\sin\theta\cos\theta$$

得 $x = \dfrac{2ab}{a+b}\cos\theta$ ……………………………(1)

2. $\cos 2\theta = \cos\angle ACB = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

得 $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}}$（$0 < \theta < 90°$）

$$= \sqrt{\frac{1+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{2}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{4ab}}$$

代入(1)得 $x = \dfrac{2ab}{a+b}\sqrt{\dfrac{(a+b)^2-c^2}{4ab}} = \dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{(a+b)^2 - c^2}$

Steiner-Lehmus定理：

在$\triangle ABC$中$\angle B$的分角線交$\overline{AC}$於E，$\angle C$的分角線交$\overline{AB}$於D，
若$\overline{BE} = \overline{CD}$則$\overline{AB} = \overline{AC}$（如圖一）

證明：由性質2知$\overline{CD} = \dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{(a+b)^2 - c^2}$

同理 $\overline{BE} = \dfrac{\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{(a+c)^2 - b^2}$（利用對稱性）

令 $\overline{BE}^2 = \overline{CD}^2$

$$\Rightarrow \quad ab \cdot \frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2} = ac \cdot \frac{(a+c)^2 - b^2}{(a+c)^2}$$

$$\Rightarrow \quad b\cdot\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}=c\cdot\frac{(a+b+c)(a+c-b)}{(a+c)^2}$$

$$\Rightarrow \quad b(a+b-c)(a+c)^2=c(a+c-b)(a+b)^2$$

觀察左右式中的 b 均以 c 代入，等號仍成立。

故知 $b(a+b-c)(a+c)^2-c(a+c-b)(a+b)^2$ 含 $(b-c)$ 的因式，作因式分解得

$$\begin{aligned} b(a+b-c)(a+c)^2-c(a+c-b)(a+b)^2 &= (b-c)(a^3+a^2b+a^2c+3abc+b^2c+bc^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

因 a，b，c 均正，最後可得 $b=c$

三、結　語

本文除了在性質 2 的另證中須用到高一三角學中的面積公式、餘弦定律及倍角公式外，其餘均在國中數學知識的範圍內，以此讓國中生了解其實數學家所提的問題以現有的數學知識是可以理解的，唯有在因式分解部份稍爲繁瑣，期盼諸位先進能提供更簡易的做法，讓更多的中學生了解 Steiner-Lehmus 定理的證明是可用基礎的數學工具達成的。

四、參考資料

1. 余進發（民 85），Steiner-Lehmus 定理的證明，科學教育月刊，189 期，第 37-40 頁。
2. 笹部貞市郎（民 75 年 9 月），幾何學辭典，第 635 頁，九章出版社。
3. 高中基礎數學第二冊（1995），國立編譯館。

★