中華民國參加1996年第37屆
國際數學奧林匹亞競賽
選訓模擬競試試題及參考解答

中華民國數學奧林匹亞委員會

一、引　言

中華民國選拔參加一九九五年第三十六屆於七月五～十七日在印度孟買舉行之國際數學奧林匹亞競賽的活動，已在中華民國數學奧林匹亞委員會主辦及中華民國數學會、國立臺灣師範大學協辦下，於四月九～十七日在國立臺灣師範大學理學院完成了選拔工作，順利產生了六位正代表，一位候補代表及四位儲訓代表。在選訓營期間共舉辦了三次模擬競試、十七個專題探討、十一個主題共22道問題的獨立研究，而三次模擬競試每次佔選拔成績的25％共佔75％，比例最高。獨立研究解題評分成績則佔15％；以下針對三次模擬競試提出解答，並在附錄中列出十一個主題的22道獨立研究題，供輔導數學資優教學的參考。

二、中華民國參加1996年國際數學奧林匹亞競賽選訓營模擬競試試題

模擬競試(一)

編號：

日期：4月11日

注意事項：(1)本試卷共3題：每題7分　(2)答卷時間共4.5小時　(3)不可使用計算器

問題一、設α，β都是正整數，試證：方程式$x^2-\alpha x+\beta=0$與$x^2+\alpha x-\beta=0$都有整數解的充要條件是：有一個邊長都是整數的直角三角形，使得α與β分別是此直角三角形的斜邊長與面積。

問題二、設實數a滿足$0<a\leqslant 1$且$a\leqslant a_j\leqslant\frac{1}{a}$（$j=1,2,3,\cdots,1996$）。試證：對於任意滿足

$$\sum_{j=1}^{1996}\lambda_j=1$$

的非負實數λ_j（$j=1,2,3,\cdots,1996$）恆有

$$\left(\sum_{j=1}^{1996}\lambda_j a_j\right)\left(\sum_{j=1}^{1996}\lambda_j a_j^{-1}\right)\leqslant\left(\frac{a+\frac{1}{a}}{2}\right)^2。$$

問題三、試找出最小的自然數 n 使得下列敍述爲眞：

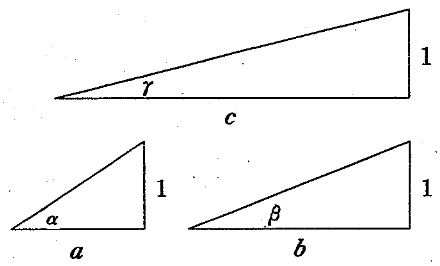
將集合 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 任意分成兩個不相交的部份子集合則至少有一部份子集合有三個相異元素，使其成等差數列。

模擬競試(二)

編號：　　　　時間：4月13日

注意事項：(1)本試卷共3題：每題7分　(2)答卷時間共4.5小時　(3)不可使用計算器

問題四、設 a,b,c 都是正整數而且 a,b,c 是底下三個直角三角形的一股的邊長（另一股都是1）



如果 $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}$ 試求所有 a,b,c 的值。

問題五、設實數 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_9$ 滿足 $2\leqslant x_1,x_2,x_3,\cdots,x_9\leqslant 3$ 且令

$$s=x_1+x_2+x_3+\cdots+x_9。$$

證明

$$\frac{x_1^2+x_2^2-x_3^2}{x_1+x_2-x_3}+\frac{x_2^2+x_3^2-x_4^2}{x_2+x_3-x_4}+\cdots+\frac{x_8^2+x_9^2-x_1^2}{x_8+x_9-x_1}+\frac{x_9^2+x_1^2-x_2^2}{x_9+x_1-x_2}\leqslant 2s-18。$$

問題六、銳角三角形 ABC 的邊 $\overline{BC}$ 上有兩點 A_1,A_2（其中 A_1 在 B 與 A_2 的中間）；$\overline{CA}$ 上有兩點 B_1,B_2（其中 B_1 在 C 與 B_2 的中間）；$\overline{AB}$ 上有兩點 C_1,C_2（其中 C_1 在 A 與 C_2 的中間）且滿足

$\angle AA_1A_2=\angle AA_2A_1=\angle BB_1B_2=\angle BB_2B_1=\angle CC_1C_2=\angle CC_2C_1$。

AA_1,BB_1,CC_1 三線交成一個三角形；AA_2,BB_2,CC_2 三線交成另一個三角形，試證明此兩個三角形的六個頂點共圓。

模擬競試(三)

編號：　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　時間：4月15日

注意事項：(1)本試卷共3題：每題7分　(2)答卷時間共4.5小時　(3)不可使用計算器

問題七、設 p 與 q 都是質數而且滿足

$$\begin{cases}(p-1)\mid(5pq-1)\\(q-1)\mid(5pq-1)\\4\mid(5pq-1)\\p\neq 5,\ q\neq 5,\ p\neq q\end{cases}$$

試求所有滿足上述條件的序對 (p,q)。

問題八、以 $\triangle ABC$ 的各邊爲一邊，向外作三角形 $\triangle BCP$，$\triangle CAQ$ 與 $\triangle ABR$，使得 $\triangle BCP\sim\triangle AQC\sim\triangle RAB$。若 X,Y 與 Z 分別是 $\triangle BCP$，$\triangle CAQ$ 與 $\triangle ABR$ 內部的點，使得 $\triangle BCX\sim\triangle AQY\sim\triangle RAZ$，試證：$\triangle XYZ\sim\triangle PCB\sim\triangle CQA\sim\triangle BAR$。

問題九、求方程式

$$85x^3+9x^2y+12xy^2+4y^3=z^3$$

的所有整數解 x,y,z？

三、模擬試題參考解答

問題一參考解答：（吳柏樟同學的解法）

（首先證明：）若存在一個整數直角三角形，使得 α 與 β 分別是此直角三角形的斜邊長與面積。則方程式 $x^2-\alpha x+\beta=0$ 與 $x^2+\alpha x-\beta=0$ 都有整數解。

證明如下：依題意知：存在 a,b 爲自然數，使得 $a^2+b^2=\alpha^2$ 且 $\dfrac{ab}{2}=\beta$

又方程式 $x^2-\alpha x+\beta=0$ 之解爲 $x=\dfrac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}$；

又 $\alpha^2-4\beta=a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$

所以解 $x=\dfrac{\alpha\pm\sqrt{(a-b)^2}}{2}=\dfrac{\alpha\pm(a-b)}{2}$；

又由 $\alpha^2=a^2+b^2$，知 α，a，b 之奇偶性可能爲（奇，奇，偶）或（偶，奇，奇）或（偶，偶，偶）或（奇，偶，奇）

但不論如何，$\alpha\pm(a-b)$必爲偶。

故 x 必爲整數，因此，方程式 $x^2-\alpha x+\beta=0$ 有整數解。

另外方程式 $x^2-\alpha x+\beta=0$ 之解爲

$$x=\frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2};$$

又 $\alpha^2+4\beta=a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$

所以 $x=\dfrac{-\alpha\pm\sqrt{(a+b)^2}}{2}=\dfrac{-\alpha\pm(a+b)}{2}$。

又由$\alpha^2=a^2+b^2$知α,a,b之奇偶性可能爲：

（奇，奇，偶）或（奇，偶，奇）或（偶，偶，偶）或（偶，奇，奇）

但無論如何$-\alpha\pm(a+b)$總是爲偶。

故 $x=\dfrac{-\alpha\pm(a+b)}{2}$必爲整數

因此方程式 $x^2+\alpha x-\beta=0$ 有整數解。

（接著證明）：若方程式 $x^2-\alpha x+\beta=0$ 與 $x^2+\alpha x-\beta=0$ 都有整數解。則必存在一個整數直角三角形，使得α與β分別是此直角三角形的斜邊長與面積。

證明如下：依題意，易知只要證明存在a,b爲自然數，滿足

$$a^2+b^2=\alpha^2 \text{ 且 } \frac{ab}{2}=\beta \text{ 即可。}$$

又因爲 $x^2-\alpha x+\beta=0$ 有整數解，所以$\alpha^2-4\beta$必爲完全平方數，

因此，存在k爲自然數，使得$\alpha^2-4\beta=k^2$。

同理，因爲 $x^2+\alpha x-\beta=0$ 有整數解，所以$\alpha^2+4\beta$必爲完全平方數。

因此，存在自然數s使得 $\alpha^2+4\beta=s^2$

取 $a=\dfrac{s+k}{2}$，$b=\dfrac{s-k}{2}$，則

$$a^2+b^2=\frac{s^2+k^2+2sk}{4}+\frac{s^2+k^2-2sk}{4}=\frac{2(s^2+k^2)}{4}=\frac{s^2+k^2}{2}$$

又因爲 $\alpha^2-4\beta=k^2$，$\alpha^2+4\beta=s^2$

所以 $\dfrac{s^2+k^2}{2}=\dfrac{\alpha^2+4\beta+\alpha^2-4\beta}{2}=\alpha^2$

所以 $a^2+b^2=\alpha^2$，且

$$\frac{ab}{2}=\frac{(s+k)(s-k)}{8}=\frac{s^2-k^2}{8}=\frac{\alpha^2+4\beta-(\alpha^2-4\beta)}{8}=\frac{8\beta}{8}=\beta$$

因此 $\dfrac{ab}{2}=\beta$。

故剩下的最後工作是證明：a,b 皆爲自然數。

討論如下：(i)若 α 爲偶 $\Rightarrow \alpha^2-4\beta$ 爲偶

$\Rightarrow k^2$ 爲偶

$\Rightarrow k$ 爲偶

同理 α 爲偶 $\Rightarrow \alpha^2+4\beta$ 爲偶

$\Rightarrow s^2$ 爲偶

$\Rightarrow s$ 爲偶

故 $a=\dfrac{s+k}{2}$ 爲自然數，且 $b=\dfrac{s-k}{2}$ 爲自然數。

（因爲 $s^2=\alpha^2+4\beta>\alpha^2-4\beta=k^2$，所以 $s>k$，且 s,k 爲自然數）

(ii)若 α 爲奇數 $\Rightarrow \alpha^2\pm 4\beta$ 爲奇數

$\Rightarrow k^2$ 與 s^2 皆爲奇數

$\Rightarrow k$ 與 s 皆爲奇數

所以 $a=\dfrac{s+k}{2}$ 爲自然數，$b=\dfrac{s-k}{2}$ 亦爲自然數。

問題二參考解答：（唐孝鈞同學的解法）

1° $\left(\sum_{j=1}^{1996}\lambda_j a_j\right)\left(\sum_{j=1}^{1996}\lambda_j a_j^{-1}\right)$

$$=(\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_{1996}a_{1996})\left(\frac{\lambda_1}{a_1}+\frac{\lambda_2}{a_2}+\cdots+\frac{\lambda_{1996}}{a_{1996}}\right)$$

$$\leqslant\left[\frac{(\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_{1996}a_{1996})+\left(\frac{\lambda_1}{a_1}+\frac{\lambda_2}{a_2}+\cdots+\frac{\lambda_{1996}}{a_{1996}}\right)}{2}\right]^2$$ （算幾不等式）

$$=\left[\frac{\lambda_1(a_1+\frac{1}{a_1})+\lambda_2(a_2+\frac{1}{a_2})+\cdots+\lambda_{1996}(a_{1996}+\frac{1}{a_{1996}})}{2}\right]^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(A)}$$

2° $(a+\frac{1}{a})-(a_j+\frac{1}{a_j}) \qquad (j=1,2,\cdots,1996)$

$$=(a-a_j)+(\frac{1}{a}-\frac{1}{a_j})=(a-a_j)+\frac{a_j-a}{aa_j}$$

$$=(a_j-a)(-1+\frac{1}{aa_j}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(B)}$$

$\because \ a_j\leqslant\frac{1}{a} \qquad \therefore \ aa_j\leqslant a\cdot\frac{1}{a}=1$

$\therefore \ (-1+\frac{1}{aa_j})\geqslant 0$ 又 $a_j\geqslant a \quad \therefore \ (a_j-a)\geqslant 0$

$\therefore$ (B)式$\geqslant 0 \quad \therefore \ (a+\frac{1}{a})\geqslant(a_j+\frac{1}{a_j}) \quad (j=1,2,\cdots,1996)$

3° $\because \ a_j+\frac{1}{a_j}\leqslant a+\frac{1}{a}$

$$\therefore \ \lambda_1(a_1+\frac{1}{a_1})+\lambda_2(a_2+\frac{1}{a_2})+\cdots+\lambda_{1996}(a_{1996}+\frac{1}{a_{1996}})$$

$$\leqslant\lambda_1(a+\frac{1}{a})+\lambda_2(a+\frac{1}{a})+\cdots+\lambda_{1996}(a+\frac{1}{a})$$

$$=(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{1996})(a+\frac{1}{a})$$

$$=(a+\frac{1}{a})$$

$$\therefore \ \left[\frac{\lambda_1(a_1+\frac{1}{a_1})+\lambda_2(a_2+\frac{1}{a_2})+\cdots+\lambda_{1996}(a_{1996}+\frac{1}{a_{1996}})}{2}\right]^2$$

$$\leqslant\left(\frac{a+\frac{1}{a}}{2}\right)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(C)}$$

4° 由(A)式及(C)式

得證 $\left(\sum_{j=1}^{1996} \lambda_j a_j\right)\left(\sum_{j=1}^{1996} \lambda_j a_j^{-1}\right) \leqslant \left(\dfrac{a+\frac{1}{a}}{2}\right)^2$ 成立

等號成立時，有 $a_1 = a_2 = \cdots\cdots = a_{1996} = a = 1$ #

問題三參考解答：（中央研究院數研所葉永南教授提供）

若 $n \leqslant 8$，則令

$S = \{1,2,\cdots,n\} \cap \{1,2,5,6\}$

$T = \{1,2,\cdots,n\} \cap \{3,4,7,8\}$

則 $S \cup T = \{1,2,\cdots,n\}$，$S \cap T = \phi$

而且 S 和 T 中都沒有形成等差數列的3個元素，所以 $n \geqslant 9$

我們要證明 $n = 9$

如果可以把 $\{1,2,\cdots,9\}$ 分成兩個不相交的部份子集合 A，B，而且集合 A，B 都不包含形成等差數列的3個相異元素，可設 $5 \in A \Rightarrow \{4,6\} \not\subset A$，考慮

(a) $\{4,6\} \subset B \Rightarrow A$ 包含2和8（不合，因爲2，5，8是等差數列）

(b) $4 \in A \Rightarrow \{3,6\} \subset B \Rightarrow 9 \in A$

由 $5,9 \in A \Rightarrow 1,7 \in B$

$6,7 \in B \Rightarrow 8 \in A$

$1,3 \in B \Rightarrow 2 \in A$（不合，因爲2，5，8是等差數列）

$\therefore$ n 的最小值是9

問題四參考解答：（台師大數學系許志農教授提供）

［解一］由複數相乘的性質（棣美佛定理）知道：

$$(a+i)(b+i)(c+i) = \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

因此

$$1 + abc = ab + bc + ca + a + b + c \qquad (*)$$

$$\Rightarrow (a-1)(b-1)(c-1) = 2(a-1)+2(b-1)+2(c-1)+4.$$

不妨假設 $a \leqslant b \leqslant c$ 且令 $1 \leqslant x = a-1 \leqslant y = b-1 \leqslant z = c-1$

（因爲 $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{4}$ 所以 $a,b,c \geqslant 2$）因此我們有

$$xyz = 2x + 2y + 2z + 4$$

如果　$3 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$　則

$$9z \leqslant xyz = 2x + 2y + 2z + 4 \leqslant 6z + 4$$

與 $3 \leqslant z$ 矛盾。

(1)　$x = 1$

$yz = 2y + 2z + 6 \Rightarrow (y-2)(z-2) = 10 \Rightarrow (y, z) = (4, 7), (3, 12)$

所以

$$(a, b, c) = (2, 5, 8), (2, 4, 13).$$

(2)　$x = 2$

$2yz = 2y + 2z + 8 \Rightarrow (y-1)(z-1) = 5 \Rightarrow (y, z) = (2, 6)$ 所以

$$(a, b, c) = (3, 3, 7).$$

所以

$$(a, b, c) = (2, 5, 8), (2, 4, 13), (3, 3, 7).$$

[解二] 設 $2 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$，則 $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$

$\because \quad \alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{4} \qquad \therefore \quad \alpha \geqslant 15^\circ$

即 $\dfrac{1}{a} = \tan \alpha \geqslant \tan 15^\circ \geqslant \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}} > \dfrac{1}{4} \qquad \therefore \quad a = 2$ 或 $a = 3$

(1)　$a = 2$　代入 [解一] 的公式(*)中得到

$$bc - 3b - 3c - 1 = 0$$
$$\Rightarrow (b-3)(c-3) = 10$$
$$\Rightarrow (b, c) = (5, 8), (4, 13)$$

(2)　$a = 3$　代入 [解一] 的公式(*)中得到

$$bc - 2b - 2c = 1$$
$$\Rightarrow (b-2)(c-2) = 5$$
$$\Rightarrow (b, c) = (3, 7)$$

因此，解得　$(a, b, c) = (2, 5, 8), (2, 4, 13), (3, 3, 7)$

(註) [解一] 較有系統但不容易想到，[解二] 較易著手；但如果將三角形改成四個（或以上）則須採用 [解一] 的模式，比較容易完整作答。

問題五參考解答：（方裕元同學的解法，李卓穎同學補充）

$\because \quad (x_1^2+x_2^2-x_3^2) \leqslant (x_1+x_2-x_3)(x_1+x_2-2) \qquad (*)$

$\therefore \quad \dfrac{x_1^2+x_2^2-x_3^2}{x_1+x_2-x_3} \leqslant x_1+x_2-2$

得到

$$\frac{x_1^2+x_2^2-x_3^2}{x_1+x_2-x_3}+\frac{x_2^2+x_3^2-x_4^2}{x_2+x_3-x_4}+\cdots\cdots+\frac{x_9^2+x_1^2-x_2^2}{x_9+x_1-x_2}$$

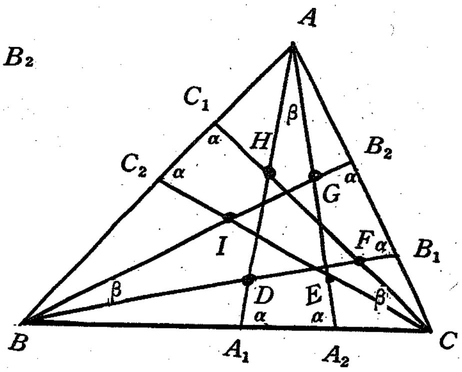
$$\leqslant (x_1+x_2-2)+(x_2+x_3-2)+\cdots\cdots+(x_9+x_1-2)$$

$$=2s-18$$

（註）不等式(*)的證明須分(1) $x_3=\max\{x_1,x_2,x_3\}$ 或 $x_3=\min\{x_1,x_2,x_3\}$

(2) x_3 介於 x_1,x_2 之間。二種情形證明，比較容易得到此不等式。

問題六參考解答：（台師大朱亮儒教授提供）



令 $\angle AA_1A_2=\angle AA_2A_1=\angle BB_2B_1=\angle BB_1B_2$

$=\angle CC_1C_2=\angle CC_2C_1=\alpha$

可知$\triangle AA_1A_2$與$\triangle BB_1B_2$與$\triangle CC_1C_2$

都是等腰△且頂角都相等，設

$\angle A_1AA_2=\angle B_1BB_2=\angle C_1CC_2=\beta$

故 A,H,E,C 共圓，得 $\angle AEH=\angle ACH$

同理 A,G,D,B 共圓，得 $\angle HDG=\angle ABG$

因 $\angle BC_2C=\alpha+\beta=\angle CB_1B$，故 $\angle C_2BB_1=\angle C_2CB_1$

得 $\quad \angle ABG=\angle C_2CB_1-\beta=\angle C_2CB_1-\beta=\angle ACH$

因此 $\quad \angle AEH=\angle HDG \qquad \therefore \quad E,D,H,G$ 共圓 同理 E,F,H,I 共圓

再證 $\quad E,F,G,H$ 共圓。

因 $\quad A,B,A_2,B$ 共圓 $\quad (\because \angle CAA_2=\angle CBB_1)$

$\therefore \quad \overline{CB_1}\cdot\overline{CA}=\overline{CB}\cdot\overline{CA_2}$ ……………………………①

因 $\quad A,B_1,F,C_1$ 共圓

$\therefore \quad \overline{CB_1}\cdot\overline{CA}=\overline{CF}\cdot\overline{CC_1}$ ……………………………②

同理 $\quad \overline{CB}\cdot\overline{CA_2}=\overline{CC_2}\cdot\overline{CE}$ ……………………………③

由①②③得 $\quad \overline{CF}\cdot\overline{CC_1}=\overline{CC_2}\cdot\overline{CE}$

$\therefore \quad \overline{CC_1}=\overline{CC_2} \qquad \therefore \quad \overline{CF}=\overline{CE}$

$\therefore$ $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$，同理 $\overline{HG} \parallel \overline{BC}$。

$\therefore$ $\angle AEF \doteq \angle BAA_2 = \angle BCC_1 = \angle GHF$

$\therefore$ G, H, E, F 共圓　故 E, F, G, H, I, D 共圓。

問題七參考解答：（台師大數學系許志農教授提供）

不妨設質數 $p < q$ 因為

$$\begin{cases} 4 \mid 5pq-1 \\ q-1 \mid 5pq-1 \\ p-1 \mid 5pq-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \mid pq-1 \\ q-1 \mid 5p-1 \\ p-1 \mid 5q-1 \end{cases}.$$

所以 p, q 必為奇質數；因此可得 $3 \leqslant p, 7 \leqslant q$。

由　$q-1 \mid 5p-1 < 5q-1 \leqslant 6(q-1)$　得

(1)　$5p-1 = q-1$　得　$q = 5p$　（不合）。

(2)　$5p-1 = 2(q-1)$ 得 $5p+1 = 2q$ 代入 $p-1 \mid 5p-1$ 得

$$p-1 \mid 2(5q-1) = 25p+3 \Rightarrow p-1 \mid 28$$

因此解得　$(p, q) = (29, 73)$。

(3)　$5p-1 = 3(q-1)$ 同(2)的方法，解得 $(p,q) = (17,29)$。

(4)　$5p-1 = 4(q-1)$ 同(2)的方法，得到 $p-1 \mid 36 \Rightarrow p = 3, 5, 13, 37$

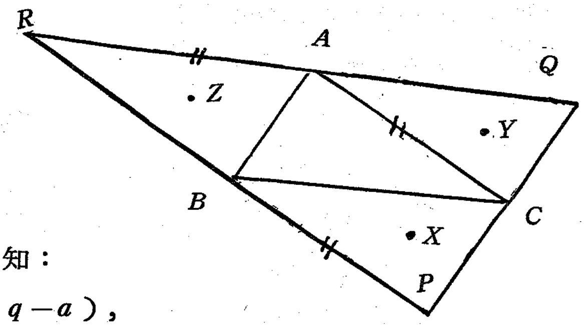
檢驗解得　$(p,q) = (13,17)$。

(5)　$5p-1 = 5(q-1)$ 時 (p,q) 無解。

所以　$(p,q) = (29,73), (73,29), (17,29), (29,17), (13,17), (17,13)$

共六組解。

問題八參考解答：（台師大數學系趙文敏教授提供）



複數法：

設 A, B, C, P, Q, R 的複數坐標

分別為 a, b, c, p, q, r

若 X 的複數坐標 x 為

$$x = b + te^{i\theta}(c-b)$$

則由 $\triangle BCX \sim \triangle AQY \sim \triangle RAZ$ 可知：

Y 的複數坐標 y 滿足 $y = a + te^{i\theta}(q-a)$，

Z 的複數坐標 z 滿足 $z = r + te^{i\theta}(a-r)$。

另一方面，因為 $\triangle AQC \sim \triangle RAB$，所以，可找到 $\rho \geqslant 0$ 及 $\alpha \in R$ 使得

$$q = c + \rho e^{i\alpha}(a - c);$$
$$a = b + \rho e^{i\alpha}(r - b);$$
$$r = b + \rho^{-1} e^{-i\alpha}(a - b)。$$

由此得

$$x - y = b - a + te^{i\theta}((c-b) - (q-a)) = (b-a) + te^{i\theta}((a-b) - \rho e^{i\alpha}(a-c))$$
$$= (b-a)(1 - te^{i\theta}) + (c-a)t\rho e^{i\theta}e^{i\alpha}$$
$$x - z = b - r + te^{i\theta}((c-b) - (a-r)) = \rho^{-1}e^{-i\alpha}(b-a) + te^{i\theta}((c-a) - \rho^{-1}e^{-i\alpha}(b-a))$$
$$= \rho^{-1}e^{-i\alpha}(b-a)(1-te^{i\theta}) + (c-a)te^{i\theta} = \rho^{-1}e^{-i\alpha}(x-y)$$
$$y - z = a - r + te^{i\theta}((q-a) - (a-r))$$
$$= (a-b)(1-\rho^{-1}e^{-i\alpha}) + te^{i\theta}[(c-a)(1-\rho e^{i\alpha}) + (b-a)(1-\rho^{-1}e^{-i\alpha})]$$
$$= (-1+\rho^{-1}e^{-i\alpha})(b-a)(1-te^{i\theta}) + (1-\rho e^{i\alpha})(c-a)te^{i\theta} = (1-\rho e^{i\alpha})(x-z)$$

因為　$y = x + \rho e^{i\alpha}(z - x)$ 且　$a = b + \rho e^{i\alpha}(r - b)$

$\therefore$　$\triangle XYZ \sim \triangle BAR \sim \triangle CQA \sim \triangle PBC$

問題九參考解答：（中研院數研所于靖教授提供）

假設 (x, y, z) 是一組解，可設 $(x, y, z) = 1$

首先證明　$3 \nmid xy$。

否則得到　$4x^3 \equiv z^3 \pmod 9$ 或 $4y^3 \equiv z^3 \pmod 9$

代入　$x = 3a + i$，　$i = 1, 2$

得　$4x^3 \equiv 4$ 或 $5 \pmod 9$

可是　$z^3 \equiv 0, 1, 8 \pmod 9$

於是　$z^3 \equiv x^3 + 3xy^2 + 4y^3 \pmod 9$

而且　$z \equiv x + y \pmod 3$　$(\because\ x^3 \equiv x \pmod 3)$

以　$z = x + y + 3b$　代入得

$$x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 \equiv x^3 + 3xy^2 + 4y^3 \pmod 9$$

$\therefore$　$4y^3 + 3x^2y \equiv 0 \pmod 9$

$\Rightarrow$　$4x^2 + 3y^2 \equiv 0 \pmod 9$　$(\because\ 3 \nmid y)$

$\Rightarrow$　$4x^2 \equiv 0 \pmod 3$

$\Rightarrow$　$3 \mid x$　（矛盾）

四、附錄：專題探討主題及獨立研究題

1. 專題探討(一)：組合學(一)，葉永南教授主持。

獨立研究(一)：葉永南教授與于靖教授共同提供。答卷時間100分鐘。

1-1 新年時某班舉行同樂會共有36人參加，已知他們身上共有148個紅包袋（可能有人沒有紅包袋）而且沒有人身上的紅包袋數大於8個。把這36個人分組，紅包數相同者分在同一組，令各組中人數最多為 n 人。請問 n 的最小值為何？

1-2 是否存在大於1的自然數 n 使得：可以將自然數分割成 n 個相異非空子集合的聯集（即每個自然數恰好落在此 n 個非空子集合中的一個）且滿足：從此 n 個子集合中任意選取 $n-1$ 個（此時僅剩下一個子集合），再從此 $n-1$ 個子集合的每個集合中任意挑選一個數則此 $n-1$ 個數的和必落在剩下的一個子集合裡。

2. 專題探討(二)：不等式，黃文達教授主持

獨立研究(二)：黃文達教授與陳創義教授共同提供。答卷時間100分鐘。

2-1 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ ；為內角平分線，設 $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{CF}$ 與 $\triangle ABC$ 外接圓分別相交於 P, Q, R 三點。證明：

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DP}}+\frac{\overline{BE}}{\overline{EQ}}+\frac{\overline{CF}}{\overline{FR}}\geqslant 9 。$$

2-2 將正三角形分割成許多三角形，證明所有這些三角形的外接圓面積的總和不小於原正三角形外接圓的面積。

3. 專題探討(三)：幾何變換，趙文敏教授主持

獨立研究(三)：趙文敏教授與許志農教授共同提供。答卷時間100分鐘。

3-1 設 P 是 $\triangle ABC$ 平面上一點，試證：

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{PC}}{\overline{AC}}+\frac{\overline{PC}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{BA}}+\frac{\overline{PA}}{\overline{CA}}\cdot\frac{\overline{PB}}{\overline{CB}}\geqslant 1 。$$

並討論等號成立的充要條件。

3-2 $\overline{AB}$ 是某圓上的固定弦，P 點是此圓上的動點；M 點為折線 APB 的中點（即 M 在線段 $\overline{AP}$ 或線段 $\overline{PB}$ 上且滿足 $\overline{AM}=\overline{MP}+\overline{PB}$ 或 $\overline{AP}+\overline{PM}=\overline{MB}$ 的點)。試求 P 點在圓周上變動時，M 點的軌跡為何？

4. 專題探討㈣：數論㈠，許志農教授主持。

獨立研究㈣：張幼賢教授與許志農教授共同提供。答卷時間100分鐘。

4-1 (1) 小明知道3,4,5可以形成一個直角三角形的三邊長。他無意間將3乘以一個正整數a加上5乘以一個正整數b再加上一個正整數c得到20，他發現20,21,29也剛好形成一個直角三角形的三邊之邊長，他一時好奇，將20乘以a加上29乘以b再加上c得到119，結果他發現119,120,169 也剛好形成一個直角三角形的三邊之邊長。於是他猜測應該有無限多個直角三角形的兩股之邊長是連續正整數，而斜邊的邊長也剛好是整數。請爲小明證明他的猜測。

(2) 若對每一個正整數n，令$a_n=[\sqrt{n^2+(n+1)^2}]$，試證明存在無線多個正整數n，可以使得$a_n-a_{n-1}>1$， 也存在無限多個正整數n，可以使得$a_{n+1}-a_n=1$。其中$[x]$表示不大於x之最大正整數。

4-2 證明：對任意固定的自然數m皆存在無窮多個可以表爲

$$n2^m-7$$

形式的完全平方數，其中n爲自然數。

5. 專題探討㈤：離散數學㈠，張鎭華教授主持。

獨立研究㈤：張鎭華教授與葉永南教授共同提供。答卷時間100分鐘。

5-1 (1) 請找出9個整數$a_1,a_2,\cdots,a_9=a_0$滿足如下條件：

(i) $|a_{i-1}-a_i|\geqslant 17\ (1\leqslant i\leqslant 9)$

(ii) $\max\limits_{1\leq i\leq 9}|a_{i-1}-a_i|=22$。

(2) 反之$b_1,b_2,\cdots,b_9=b_0$是另一組滿足條件(i)的整數則證明

$$\max_{1\leq i\leq 9}|b_{i-1}-b_i|\geqslant 22。$$

5-2 某次有n人在一起聚會，任何二人最多互相握手一次。

(1) 如果每個人至少握過4次手而且已知這次聚會總共彼此握手125次。請問n的最大值爲何？

(2) 如果已知這次聚會總共彼此握手200次。請問n的最小值爲何？

6. 專題探討㈥：代數㈠，林哲雄教授主持。

獨立研究㈥：許志農教授與于靖教授共同提供。答卷時間100分鐘。

6-1 三角形ABC的三邊長$a=BC$，$b=CA$，$c=AB$爲自然數，試求滿足

$$\begin{cases} \angle B = 2\angle A \\ a,b,c \text{ 互質且 } 1 \leqslant a \leqslant 24 \end{cases}$$

的所有三角形ABC。

6-2 令$q_0, q_1, q_2, \cdots$爲一整數數列且滿足以下條件：

(i) 當$m > n$時，$m-n$總是$q_m - q_n$的因數。

(ii) 對所有整數n恆有$|q_n| \leqslant n^{10}$。

試證明：存在一個多項式$Q(x)$使得$q_n = Q(n)$恆成立。

7. 專題探討(七)：離散數學(二)，朱亮儒教授主持。

獨立研究(七)：朱亮儒教授與葉永南教授共同提供。答卷時間100分鐘。

7-1 試找出最大的正整數n使得從$1, 2, 3, \cdots, n$中任意選出9個相異數，必有兩數x, y滿足$8 \leqslant x-y \leqslant 13$。

7-2 試找出滿足下列(*)條件的最小正整數n

(*)：把集合$\{1, 2, \cdots, n\}$分成任意相異兩個集合A，B的聯集，則一定可以單獨在集合A或集合B中，挑出5個元素$x_1, x_2, \cdots, x_5$（可能重覆挑選）使得 $x_1+x_2+x_3+x_4 = x_5$

8. 專題探討(八)：不定方程，洪有情教授主持。

獨立研究(八)：于靖教授與洪有情教授共同提供。答卷時間100分鐘。

8-1 找所有滿足

$$x + y^2 + (x, y)^3 = xy(x, y)$$

的自然數解x, y，其中(x, y)代表x與y的最大公因數。

8-2 如果p是一個質數，x, y爲非負整數且滿足

$$p^x - y^p - p^p = 0$$

試求所以這樣的解(p, x, y)？

9. 專題探討(九)：數論(二)，許志農教授主持。

獨立研究(九)：許志農教授提供。答卷時間100分鐘。

9-1 給定自然數n，定義集合A_n及有理數S_n如下：

$$A_n = \{(a, b) \mid a, b \text{ 爲不大於 } n \text{ 且互質的自然數}\}$$

$$S_n = \frac{a_n}{n^2}$$

其中a_n代表集合A_n的個數。

證明：可以找到一個自然數 n_0 使得當 $n \geqslant n_0$ 時 $S_n < \frac{7}{10}$。

9-2　如果 p 是質數滿足 $\dfrac{2^{p-1}-1}{p}$ 是一個完全平方數；試求所有質數 p 的值。

10. 專題探討(十)：數學歸納法解題策略，陳昭地教授主持。

獨立研究(十)：陳昭地教授與于靖教授共同提供。答卷時間100分鐘。

10-1　設 m，n 爲自然數且整數數列 $\langle a_k \rangle$，$\langle b_k \rangle$ 滿足

$$\begin{cases} 1 \leqslant a_1, a_2, \cdots, a_n \leqslant m \\ 1 \leqslant b_1, b_2, \cdots, b_m \leqslant n \end{cases}$$

試證：存在 $1 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant n$，$1 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant m$ 使得

$$\sum_{k=j_1}^{j_2} a_k = \sum_{k=s_1}^{s_2} b_k \text{。}$$

10-2　試找出所有滿足下列條件的正整數 n：

"n^2 的末三位數字都是相同且非零的數字"

（例如：$38^2 = 1444$）

11. 專題探討(十一)：組合數學(二)，葉永南教授提供。

獨立研究(十一)：趙文敏教授與黃文達教授共同提供。答卷時間100分鐘。

11-1　設 $\triangle ABC$ 的三邊長分別爲 a，b 與 c，而面積爲 $\triangle$。試證：對任意正整數 p,q 與 r，恆有

$$\frac{p}{q+r}a^2 + \frac{q}{r+p}b^2 + \frac{r}{p+q}c^2 \geqslant 2\sqrt{3}\triangle$$

11-2　設 A，B，C，D 爲空間四點，滿足

$$\begin{cases} \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = 1 \text{，} O\text{是原點} \\ \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CD} = \dfrac{512}{27} \end{cases}$$

證明：$ABCD$ 爲正四面體。

12. 專題探討(十二)：複數幾何，趙文敏教授主持。

13. 專題探討(十三)：離散數學解題策略，張鎮華教授主持。

14. 專題探討(十四)：立體幾何，陳創義教授主持。

15. 專題探討(十五)：代數(二)，林哲雄教授主持。

16. 專題探討(十六)：國際數學競試解題策略(一)，張百康教授主持。

17. 專題探討(十七)：國際數學競試解題策略(二)，張百康教授主持。　★