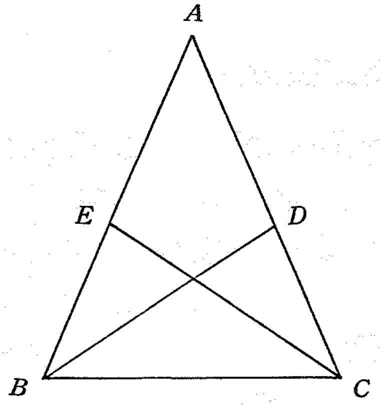
Steiner-Lehmus定理的證明

余進發
臺南市立文賢國民中學

壹、前　言：

在國中數學的平面幾何教材中，有一則非常簡單的定理：在等腰三角形中，兩底角的平分線相等。其逆定理—「在三角形中，若有兩個內角的平分線相等；則此三角形為等腰三角形。」亦成立。即：

在$\triangle ABC$中，若$\angle B$的平分線交$\overline{AC}$於D，$\angle C$的平分線交$\overline{AB}$於E，且$\overline{BD}=\overline{CE}$，則$\overline{AB}=\overline{AC}$。（如圖一）



圖一

這就是著名的『Steiner-Lehmus 定理』。

在1840年，C.L.Lehmus 寫了一封信給數學家C.Sturm；請其對上述命題給予一個純幾何之證明。而大名鼎鼎的幾何學家J.Steiner，他是第一個完整證明此命題的人。所以，後來這個定理，就以第一個提出問題者和第一個給予證明者，他們兩人的名字來命名。

這個定理的證明，對於國中生而言，稍嫌難些。但部分程度較高的國中生，常私下向老師請教其證法。尤其是欲參加數理資優甄試的國中生，十之八九都會問到此題。故本人在此提出四種證法，供各位先進參考應用。

貳、第一種證法：

兩個不等式$\overline{AC}\geqq\overline{AB}$與$\overline{AC}\leqq\overline{AB}$中，總有一個成立。不妨設$\overline{AC}\geqq\overline{AB}$，由此得

$$\angle ABC\geqq\angle ACB \tag{1}$$

設$\overline{BD}$和$\overline{CE}$交於點O（如圖二），$\because$ $\overline{BD}$、$\overline{CE}$分別為$\angle B$、$\angle C$的平分線，則$\angle OBE\geqq\angle OCA$。因此，可作$\angle OBM=\angle OCA$，使$M$、$E$二點在$\overline{BD}$之同側。設

$\overline{BM}$分別交$\overline{CE}$、$\overline{CA}$於N、M，則
$\overline{CN} \leqq \overline{CE} = \overline{BD}$。且顯然$\triangle MBD \sim \triangle MCN$（A.A. 相似），則

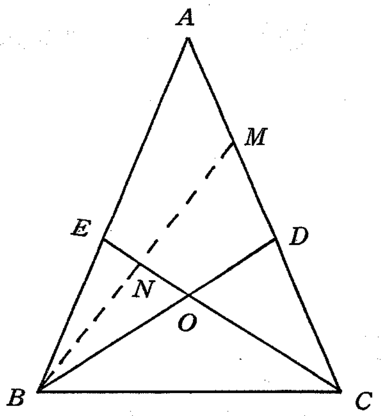
$$\frac{\overline{MC}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{BD}} \leqq \frac{\overline{CE}}{\overline{BD}} = 1$$

$\therefore$　$\overline{MC} \leqq \overline{MB}$，則

$$\angle MBC \leqq \angle MCB$$

左右兩式減去相等的兩角$\angle OBM$、$\angle OCA$，

得　$\angle OBC \leqq \angle OCB$



圖二

左右兩式再同乘以2，得　$2\angle OBC \leqq 2\angle OCB$

由角平分線性質，則　$\angle ABC \leqq \angle ACB$　(2)

由(1)式和(2)式，可得　$\angle ABC = \angle ACB$

故　$\overline{AB} = \overline{AC}$

參、第二種證法：

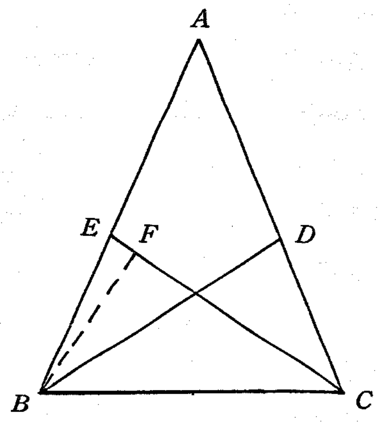
假定$\overline{AB} \neq \overline{AC}$，不妨設$\overline{AC} > \overline{AB}$，由此得　$\angle ABC > \angle ACB$

又$\because$ $\overline{BD}$、$\overline{CE}$分別爲$\angle B$、$\angle C$的平分線，

則　$\angle ABD > \angle ACE$

$\therefore$可在$\overline{CE}$上取一點F（$E \neq F$）（如圖三），

使　$\angle DBF = \angle ACE$



圖三

則$\overline{CE} > \overline{CF}$，且$B$、$C$、$D$、$F$四點共圓，又

$$\begin{aligned}\angle DCB &= \angle DCF + \angle BCF < \frac{1}{2}\angle ACB + \frac{1}{2}\angle ABC \\ &= \angle CBF < \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle ABC + \angle A) \\ &= 90^\circ\end{aligned}$$

因此，在同一圓上，兩銳角$\angle DCB$與$\angle CBF$其所對弦$\overline{BD}$與$\overline{CF}$的關係式爲

$$\overline{BD} < \overline{CF} \qquad (3)$$

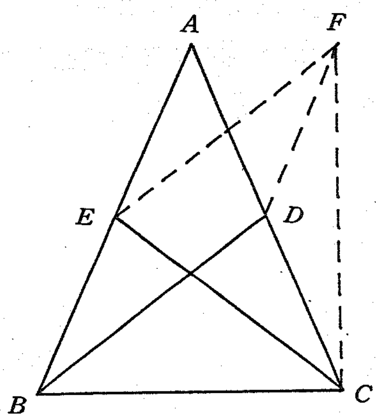
但是，由已知與所作，得

$$\overline{BD} = \overline{CE} > \overline{CF} \qquad (4)$$

顯然，(3)式與結論(4)式相矛盾。則假定 $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ 必不成立。

故 $$\overline{AB} = \overline{AC}$$

肆、第三種證法：



圖四

以 $\overline{BE}$、$\overline{BD}$ 爲二鄰邊作平行四邊形 $BDFE$（如圖四），則 $\angle EFD = \angle EBD$ 且 $\overline{BD} = \overline{EF}$。連 $\overline{CF}$，又 $\overline{BD} = \overline{CE}$，$\therefore \overline{CE} = \overline{EF}$，則

$$\angle ECF = \angle EFC$$

假定 $\overline{AB} \neq \overline{AC}$，不妨設 $\overline{AC} > \overline{AB}$，由此得

$$\angle ABC > \angle ACB$$

但 $\overline{BD}$、$\overline{CE}$ 分別爲 $\angle B$、$\angle C$ 的平分線，則

$$\angle EBD > \angle ECD$$

$$\angle EFD = \angle EBD > \angle ECD$$

$\therefore$ $\angle EFC - \angle EFD < \angle ECF - \angle ECD$，即

$$\angle DFC < \angle DCF$$

$\therefore$ $\overline{DC} < \overline{DF}$，則 $\overline{DC} < \overline{BE}$ (5)

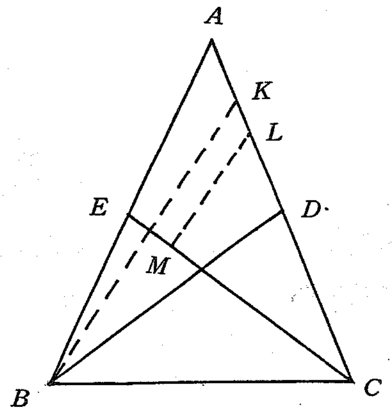
但在 $\triangle BCD$ 與 $\triangle CBE$ 中，$\because$ $\overline{BC} = \overline{BC}$，$\overline{BD} = \overline{CE}$，$\angle DBC > \angle ECB$，

$\therefore$ 由樞紐定理可得 $\overline{DC} > \overline{BE}$ (6)

顯然，(5)式與結論(6)式相矛盾。則假定 $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ 必不成立。

故 $$\overline{AB} = \overline{AC}$$

伍、第四種證法：



圖五

假定 $\overline{AB} \neq \overline{AC}$，不妨設 $\overline{AC} > \overline{AB}$，由此得 $\angle ABC > \angle ACB$

又 $\because$ $\overline{BD}$、$\overline{CE}$ 分別爲 $\angle B$、$\angle C$ 的平分線，則 $\angle ABD > \angle ACE$

$\therefore$ 可在 $\angle ABD$ 內，作 $\angle DBK = \angle ACE$（如圖五），得 $\angle KBC > \angle ACB$，則

$$\overline{KC} > \overline{KB}$$

$\therefore$ 可在 $\overline{CK}$ 上取一點 L（$L \neq K$），使 $\overline{CL} = \overline{BK}$

過 L 作直線 $\overline{LM} /\!/ \overline{BK}$，交 $\overline{CE}$ 於點 M，則 $\angle CLM = \angle CKB$

$\because$ $\overline{LM}$ 落在 $\triangle KBC$ 內， $\therefore$ 亦落在 $\triangle ACE$ 內，得 $\overline{CE} > \overline{CM}$

又顯然，$\triangle CLM \cong \triangle BKD$（A.S.A.全等），則 $\overline{CM} = \overline{BD}$

$\therefore$ 可得 $\overline{CE} > \overline{BD}$，但此與已知" $\overline{CE} = \overline{BD}$ "相矛盾。

則假定 $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ 必不成立。

故 $\overline{AB} = \overline{AC}$

陸、結　語：

『Steiner-Lehmus 定理』的證法，除了上述四種外，還有很多不同的證法；大多是屬於間接證法，包括：反證法和同一法。本文所介紹四種證法中，以第二種較簡易。而這四種證法所用的數學知識，皆不出國中數學教材之範疇，以便適合國中程度。最後，期望本文對各位先進，在教學上能所增益。

柒、參考資料：

1. 譚嘉培編著（民52）平面幾何學，（台北）臺灣中華書局。
2. 梅向明主編（1992）平面幾何及變換，（北京）北京師範學院出版社。
3. 蔣聲編著（1993）初中幾何妙題巧解，（上海）上海科技教育出版社。
4. 蔣聲著（民83）幾何變換，（新竹）凡異出版社。
5. 歐陽絳著（民83）數學的藝術，（台北）九章出版社。
6. 張景中著（民84）平面幾何新路，（台北）九章出版社。

★

更 正 啓 事

本刊第188期第15頁第1題，漏排結構式，特此補排如下，並向高雄師大化學系及讀者致歉。