$f(x)-x \mid f(f(x))-x$ 的一個推廣

邱坤毅
省立臺東高級中學

一、動　機

葉東進老師在數學傳播第18卷第4期79～81頁「課堂記事二則」一文中提出有趣的問題：

設 $a, b \in R$，$f(x)=x^2+ax+b$

證明：$f(x)-x \mid f(f(x))-x$　（$f(x)-x$ 整除 $f(f(x))-x$）

並用重根定理及連鎖律證出 $f(x)$ 在一般 n 次（$n \geqslant 2$）多項式此性質依然成立。緊接著彰化師大數學系陳國傑先生在數學傳播第19卷第二期94頁另提出了以高一教材爲工具的證明。本文亦以高一教材爲基礎，嘗試做推廣的工作。在此一幷向葉老師及陳先生誌謝，由於您們的文章激發了此文的產生，但因個人才疏學淺，敬請諸位先進不吝指正。

二、本　文

定義：(1)　$f^0(x)=(f(x))^0=1$（$f(x) \neq 0$）

$f^n(x)=(f(x))^n$（$n \in N$）

(2)　$f_0(x)=x$　　$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$（$n \in N$）

表 $f(x)$ 自身合成 n 次函數

今將過程分成三個引理，然後再導出一般的定理敍述如下：

引理1：若 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}\cdots\cdots+a_1x+a_0$（$f(x) \in C[x]$ 且 $\deg f(x) \geqslant 2$）

則 $f(x)-x \mid f_2(x)-f_1(x)$

證明：1°　$f_2(x)-f_1(x)$

$=a_nf^n(x)+a_{n-1}f^{n-1}(x)\cdots+a_1f(x)+a_0-(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}\cdots+a_1x+a_0)$

$=a_n(f^n(x)-x^n)+a_{n-1}(f^{n-1}(x)-x^{n-1})\cdots+a_1(f(x)-x)$

因 $\forall m \in N$，$f^m(x)-x^m$ 皆可析出 $f(x)-x$ 的因式

故可找到多項式 $Q(x)$ 使 $f_2(x)-f_1(x)=(f(x)-x)Q(x)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

2° 更進一步尋找$Q(x)$：

由1°中知$f_2(x)-f_1(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k\,(\,f^k(x)-x^k\,)$

$$=(\,f(x)-x\,)\sum_{k=1}^{n} a_k\,(\,f^{k-1}(x)+x\cdot f^{k-2}(x)+x^2 f^{k-3}(x)\cdots+x^{k-1}\,)$$

$$=(\,f(x)-x\,)(\sum_{k=1}^{n} a_k f^{k-1}(x)+\sum_{k=2}^{n} a_k\cdot x\cdot f^{k-2}(x)+\sum_{k=3}^{n} a_k\cdot x^2\cdot f^{k-3}(x)$$

$$+\cdots+\sum_{k=n}^{n} a_k x^{k-1}\,)$$

即(1)中的$Q(x)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_k f^{k-j}(x)\cdot\ x^{j-1}$ #

引理2：$f_{i+1}(x)-f_i(x)\mid f_{i+2}(x)-f_{i+1}(x)(\ \forall\ i\geqslant 0\ )$

證明：由引理1知$f_2(x)-f_1(x)=(\ f(x)-x\ )\ Q(x)$

將x以$f_i(x)$代入得$f_2(\,f_i(x))-f_1(\,f_i(x))=(f(f_i(x))-f_i(x))Q(f_i(x))$

即 $f_{i+1}(x)-f_i(x)\mid f_{i+2}(x)-f_{i+1}(x)$ #

引理3：$f_{i+1}(x)-f_i(x)\mid f_{j+1}(x)-f_j(x)(\ \forall\ j\geqslant i\ )$

證明：由引理2知$f_{i+1}(x)-f_i(x)\mid f_{i+2}(x)-f_{i+1}(x)$

$$f_{i+2}(x)-f_{i+1}(x)\mid f_{i+3}(x)-f_{i+2}(x)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f_j(x)-f_{j-1}(x)\mid f_{j+1}(x)-f_j(x)$$

$\Rightarrow$ $f_{i+1}(x)-f_i(x)\mid f_{j+1}(x)-f_j(x)(\ \forall\ j\geqslant i\ )$ #

最後將其寫成一般性的定理：

若 $k>j\geqslant i\geqslant 0$ 則 $f_{i+1}(x)-f_i(x)\mid f_k(x)-f_j(x)$

證明：由引理3知$f_{i+1}(x)-f_i(x)\mid f_{j+1}(x)-f_j(x)$

又 $f_{j+1}(x)-f_j(x)\mid f_{j+2}(x)-f_{j+1}(x)$

$$f_{j+2}(x)-f_{j+1}(x)\mid f_{j+3}(x)-f_{j+2}(x)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f_{k-1}(x)-f_{k-2}(x)\mid f_k(x)-f_{k-1}(x)$$

$\Rightarrow f_{i+1}(x)-f_i(x)\mid(f_{j+1}(x)-f_j(x))+(f_{j+2}(x)-f_{j+1}(x))+(f_{j+3}(x)-f_{j+2}(x))\cdots$

$+(f_k(x)-f_{k-1}(x))$ $\Rightarrow$ $f_{i+1}(x)-f_i(x)\mid f_k(x)-f_j(x)$ #

（下轉第48頁）