力學的應用一推鉛球的研究

*許賢富 **巫朋桂
*臺中縣立沙鹿國民中學
**臺中縣立鹿寮國民中學

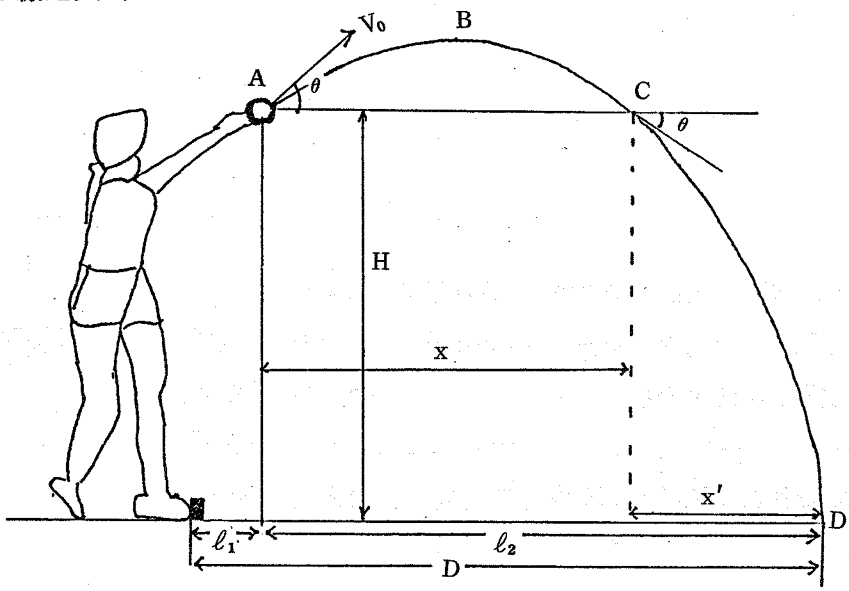
壹、前　言

近代田徑運動已逐漸科學化，運用科學理論，甚至科學儀器，來追求技術的提升，以達盡善盡美，突破記錄。推鉛球運動亦不例外，以下就以力學的觀點，探討影響推鉛球的條件，希望能藉此研究結果，幫助運動員，了解投擲鉛球的技巧，而得到最佳成績。

貳、研究過程及內容

一、水平射程方程式

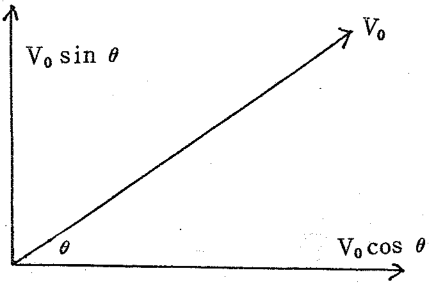
如圖一所示，一選手將一鉛球推出，鉛球就沿拋物線ＡＢＣＤ之軌跡著地，圖中Ｈ表鉛球距地面的垂直高度，V_0 表鉛球的初速度，θ 角表鉛球擲出時的出射角，即初速度方向與水平線之夾角。



圖一

拋物線ABCD，是由ABC的水平方向等速直線運動（事實上全部拋物線的水平方向均作等速直線運動）和垂直上拋運動的合成運動。然而鉛球在垂直方向上只受地心引力作用，而且在小範圍內，地心引力可看作定力，由牛頓第二運動定律：F＝m×a知鉛球在垂直方位是作等加速度運動，若將初速度V_0分解爲水平分量$V_0\cos\theta$和垂直分量$V_0\sin\theta$如圖二所示。則鉛球由A到最高點B所需時間t，可由等加速度公式：

$V = V_0 + a\times t$　求得。



圖二

即$O = V_0\sin\theta - g\times t$。（因鉛球在B處垂直分速爲零。）

$$\therefore\quad t = V_0\sin\theta/g$$

經B到C所需時間T_{ABC}是t時間的2倍，故

$$T_{ABC} = 2\times t = 2V_0\sin\theta/g \cdots\cdots(1)$$

至於鉛球由A經BC到D所需時間T_{ABCD}亦可由等加速度求距離的公式：

$S = V_0\times t + \frac{1}{2}\times g\times t^2$，在考慮方向後求得。即

$$-H = V_0\sin\theta\times T_{ABCD} - \frac{1}{2}\times g\times T_{ABCD}^2$$

$$\therefore\quad T_{ABCD}^2 - \frac{2}{g}V_0\sin\theta\cdot T_{ABCD} - \frac{2H}{g} = 0$$

$$\therefore\quad T_{ABCD} = \frac{1}{g}\left(V_0\sin\theta + \sqrt{V_0^2\sin^2\theta + 2gH}\right)\cdots\cdots(2)$$

而鉛球自離開選手推出到著地的水平射程ℓ_2應爲：

$$\ell_2 = (V_0\cos\theta)\times T_{ABCD} = V_0\cos\theta/g\left(V_0\sin\theta + \sqrt{V_0^2\sin^2\theta + 2gH}\right)\cdots\cdots(3)$$

(3)式即爲推鉛球的水平射程方程式，而推鉛球的成績爲D，則

$$D = \ell_1 + \ell_2 = \ell_1 + V_0\cos\theta/g\left(V_0\sin\theta + \sqrt{V_0^2\sin^2\theta + 2gH}\right)\cdots\cdots(4)$$

由方程式(4)中ℓ_1，V_0，θ，H均爲自變量，都會影響D的大小。

二、鉛球離手時的高度對水平射程的影響

由水平射程方程式(3)可知，H愈大時ℓ_2就愈大（設V_0與θ固定），故知個子愈高的運動員，基本上就比較有利，何況個子高的運動員手亦較長，在θ固定下，ℓ_1＝

手長× cos θ 亦較大，故總成績D亦愈大。

以下就以一個實例來看看H對 ℓ_2 的影響程度：設另有一身高爲（H＋x）米的運動員，其推出的 ℓ_2' 長依公式(3)應寫成：

$$\ell_2' = V_0 \cos\theta / g \left[V_0 \sin\theta + \sqrt{V_0^2 \sin^2\theta + 2g(H+x)} \right]$$

∴ ℓ_2' 和身高爲H米運動員推出的 ℓ_2 之差爲：$\ell_2' - \ell_2 =$

$$V_0 \cos\theta / g \left[V_0 \sin\theta + \sqrt{V_0^2 \sin^2\theta + 2(H+x)} \right] - V_0 \cos\theta / g \left(V_0 \sin\theta + \sqrt{V_0^2 \sin^2\theta + 2gH} \right) = V_0 \cos\theta / g \left[\sqrt{V_0^2 \sin^2\theta + 2g(H+x)} - \sqrt{V_0^2 \sin^2\theta + 2gH} \right]$$

今令一身高 1.75 m和 1.85 m的兩位選手，均以初速 (V_0)10m/s，$\theta = 45°$，$g = 9.8\text{m/s}^2$ 的條件下推出鉛球，則其水平距離會因身高至少相差有：

$$10 \times \cos 45° / 9.8 \left(\sqrt{10^2 \times \sin^2 45° + 2 \times 9.8 \times 1.85} - \sqrt{10^2 \sin^2 45 + 2 \times 9.8 \times 1.75} \right)$$

≒0.07657 m，即當運動員身高每高出 10 cm，在同樣條件下，其水平射程就增加 8 cm，且若 θ 再小些，差值將更大。

三、出射角對水平射程之影響

作斜上拋射時，水平射程 $x = V_0 \cos\theta \times 2V_0 \sin\theta / g = V_0^2 \sin 2\theta / g$，可知 $\theta = 45°$ 時，x 爲最大值。

而作斜下拋射時，水平射程 $x' = \ell_2 - x = V_0 \cos\theta / g \times \left(V_0 \sin\theta + \sqrt{V_0^2 \sin^2\theta + 2gH} \right) - V_0^2 \sin 2\theta / g = \left[V_0 \cos\theta \sqrt{V_0^2 \sin^2\theta + 2gH} - V_0^2 \sin\theta \cos\theta \right] / g$，可知 $\theta = 0°$ 時，x' 爲最大值，且 θ 值愈接近 $0°$ 時 x' 愈大。

由於推鉛球時ＡＢＣ段爲斜上拋射，必須在 $\theta = 45°$ 時，鉛球的水平位移(x)才能最大值，而ＣＤ段爲斜下拋射，必須在 $\theta = 0°$ 時，鉛球的水平位移 (x') 才能最大值，而 ℓ_2 又是 x 和 x' 之和，且斜上拋射仰角又等於斜下拋射的俯角，故可推知 $\theta = 45°$ 時，ℓ_2 並非爲最大值，而是 θ 略小於 45° 時，且以 39°～44° 爲最理想，這可由代入數據（表一）可驗證。例如當 H = 2.00 m，$V_0 = 9\text{m/s}$ 時，以 $\theta = 39°$ 水平射程最大；而當 $V_0 = 14\text{m/s}$ 時，則以 $\theta = 42°$ 水平射程爲最大。

四、初速度對水平射程的影響

由水平射程方程式(3)可知，V_0 愈大 ℓ_2 愈大（令H與 θ 保持固定），以下將以實際例子計算 V_0 對 ℓ_2 之影響程度。

設第一次以 V_0 之初速度拋出，其水平射程爲 ℓ_2'，第二次以（V_0＋x）之初速推出，其水平射程爲 ℓ_2''，則 ℓ_2'' 與 ℓ_2' 之差：$\ell_2'' - \ell_2' =$

表一：控制變因爲H＝2.000 m，g＝9.800 m/s²，水平射程ℓ_2的比較值

ℓ_2(m) ＼ 出射角 θ / V_0 射出速度	37°	38°	39°	40°	41°	42°	43°	44°	45°	46°
8 m/s	8.288	8.293	8.291	8.282	8.267	8.244	8.215	8.179	8.140	8.086
9 m/s	10.044	10.060	10.068	10.067	10.057	10.039	10.012	9.975	9.930	9.876
10 m/s	11.982	12.011	12.030	12.039	12.036	12.023	11.999	11.963	11.917	11.859
11 m/s	14.102	14.148	14.181	14.200	14.207	14.200	14.180	14.146	14.098	14.037
12 m/s	16.409	16.473	16.521	16.554	16.571	16.572	16.557	16.525	16.477	16.413
13 m/s	18.904	18.988	19.054	19.102	19.131	19.141	19.131	19.103	19.055	18.987
14 m/s	21.589	21.696	21.781	21.845	21.887	21.907	21.905	21.880	21.832	21.762

$$\frac{(V_0+x)\cos\theta}{g}\left[(V_0+x)\sin\theta+\sqrt{(V_0+x)^2\sin^2\theta+2gH}\right]-\frac{V_0\cos\theta}{g}\times$$

$(V_0\sin\theta+\sqrt{V_0^2\sin^2\theta+2gH})$，若$H=1.75$ m，$V=10$ m/s，$x=1$ m/s，$g=9.8$ m/s²，$\theta=45°$，則

$$\ell_2''-\ell_2'=\frac{11\times\frac{1}{\sqrt{2}}}{9.8}\times\left(11\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{11^2\times\frac{1}{2}+2\times9.8\times1.75}\right)-\frac{10\times\frac{1}{\sqrt{2}}}{9.8}\times\left(10\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{10^2\times\frac{1}{2}+2\times9.8\times1.75}\right)$$

$=2.173$ m。

可知V每增加1 m/s，水平射程可增加2公尺多，可見影響水平射程最重要的因子爲初速度V_0，它亦正是運動員力量的一種表現。

参、結　論

由以上各點的論述可知，當θ角在39°～44°間，身高愈高，且初速度愈大（即推力愈大），可將鉛球推至最遠，若再配合慣性理論，將有最佳的成績表現，可見要成爲現代運動員除了要有清晰的頭腦外，還應具備有力學的理論根基，若能如此，則破記錄指日可待。

参考資料

1. 國中理化教師手册，國立編譯館出版。
2. 高中物理，國立臺灣師範大學科學教育中心主編。
3. 基本物理學，林濤、黃曙平合譯，新陸書局出版。

★