1996年第8屆亞太數學奧林匹亞
競賽試題及參考解答

1996年3月12日
中華民國數學奧林匹亞委員會提供

注意事項：

(1) 時間分配：4小時。
(2) 配分：每題7分，滿分35分。
(3) 不可使用計算器。

問題一：四邊形$ABCD$滿足$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}$。設$M$，$N$，$P$，$Q$分別爲線段$AD$，$CD$，$AB$，$BC$上的點且$\overline{MN}$，$\overline{PQ}$是垂直於對角線$\overline{BD}$的兩線段。假設$\overline{MN}$與$\overline{PQ}$的距離爲一定值$d>\dfrac{\overline{BD}}{2}$，試證明六邊形$AMNCQP$的周長與$\overline{MN}$，$\overline{PQ}$的位置無關。（只與$d$值有關）

問題二：設m與n爲正整數滿足$n\leq m$。試證明

$$2^n n!\leq\frac{(m+n)!}{(m-n)!}\leq(m^2+m)^n。$$

問題三：設P_1，P_2，P_3，P_4是某一圓上的相異四個點。令I_1爲$\triangle P_2P_3P_4$的內心，I_2爲$\triangle P_1P_3P_4$的內心，I_3爲$\triangle P_1P_2P_4$的內心，且I_4爲$\triangle P_2P_3P_1$的內心。試證：I_1，I_2，I_3，I_4爲一矩形的四個頂點。

問題四：國家婚姻局希望安排n對夫婦成滿足下列條件的17組：

(1) 每一組的成員都是同一種性別，也就是全是男性或者全是女性。
(2) 任何二組的成員人數之差爲0或1。
(3) 每一組都至少有一人。
(4) 每個人都必須恰好屬於某一組。

試找出所有≤ 1996中可能的n值，並證明之。

問題五：設a，b，c爲一個三角形的三邊長，試證明

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}。$$

並問等號何時成立？

問題參考解答

問題一：如右圖，設MN與PQ及$M'N'$與$P'Q'$的距離均為d。容易證得

$\triangle MM'E \cong \triangle P'PF$

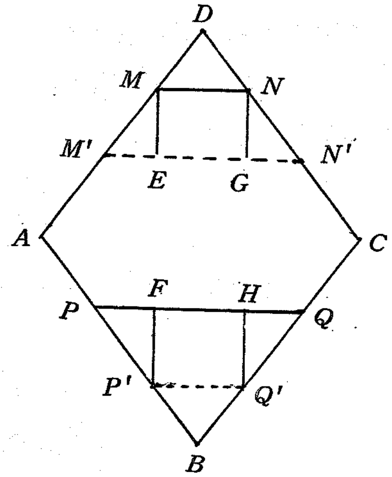
所以　$MM' = PP'$，$M'E = PF$

同理　$NN' = QQ'$，$N'G = QH$

又$ABCD$為菱形，因此

$$MN = EG = FH = P'Q'$$

綜合這些等式，即得六邊形$AMNCQP$與六邊形$AM'N'CQ'P'$的周長一樣。



（註）本問題是簡單的平面幾何題；國中生就可以思想作答。事實上，推廣至平行四邊形時，本問題也是對的。我國參與競賽的學生本題幾乎都得滿分（七分）。

問題二：首先對n作數學歸納法證明

$$\frac{(m+n)!}{(m-n)!} = \prod_{i=1}^{n}(m^2+m-i^2+i)。$$

(1)　$n=1$時

$$\frac{(m+1)!}{(m-1)!} = m(m+1) = m^2+m。$$

(2)　設n時原式成立則$n+1$時

$$\frac{(m+n+1)!}{(m-n-1)!} = \left(\prod_{i=1}^{n}(m^2+m-i^2+i)\right)(m+n+1)(m-n)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n}(m^2+m-i^2+i)\right)(m+n+1)(m-n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n+1}(m^2+m-i^2+i)$$

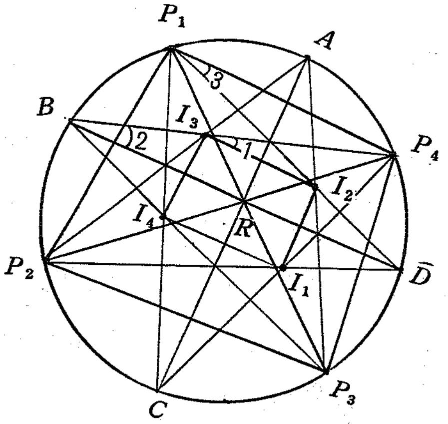
因為當$i \le m$時

$$m^2+m \ge m^2+m-i^2+i \ge i^2+i-i^2+i = 2i$$

所以 $$2^n n! \leq \frac{(m+n)!}{(m-n)!} \leq (m^2+m)^n 。$$

（註）本問題的作法有很多，如採數學歸納法，算幾不等式，甚至使用排列組合的方法都可以順利將它解決。我國參賽者在本題也幾乎都答對。

問題三：（陳明揚同學作法）



(1) 如右圖，A，B，C，D分別為 $\overset{\frown}{P_1P_4}$，$\overset{\frown}{P_1P_2}$，$\overset{\frown}{P_2P_3}$，$\overset{\frown}{P_3P_4}$ 的中點並連接AC與BD，交於R點。

$\because \overset{\frown}{P_1P_2}+\overset{\frown}{P_2P_3}+\overset{\frown}{P_3P_4}+\overset{\frown}{P_4P_1}=2\pi$

$$\therefore \begin{cases} \overset{\frown}{AP_1}+\overset{\frown}{BP_1}+\overset{\frown}{CP_3}+\overset{\frown}{DP_3}=\pi \\ \overset{\frown}{AP_4}+\overset{\frown}{DP_4}+\overset{\frown}{BP_2}+\overset{\frown}{CP_2}=\pi \end{cases}$$

$$\therefore \quad \angle ARB=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AP_1}+\overset{\frown}{BP_1}+\overset{\frown}{DP_3}+\overset{\frown}{CP_3})=\frac{\pi}{2}$$

同理 $$\angle BRC=\frac{\pi}{2}$$

所以 $$\overline{AC} \perp \overline{BD}$$

(2) 欲證明：$\overline{I_2I_3} /\!/ \overline{BD}$，$\overline{I_1I_4} /\!/ \overline{BD}$及$\overline{I_3I_4} /\!/ \overline{AC}$，$\overline{I_1I_2} /\!/ \overline{AC}$。

但因為$\overline{I_2I_3} /\!/ \overline{BD} \Longleftrightarrow \angle 1=\angle 2=\angle 3 \Longleftrightarrow P_1P_4I_2I_3$四點共圓。

現在證明$P_1P_4I_2I_3$四點共圓。

連接$\overline{P_1A}$，$\overline{P_4A}$，$\overline{P_1I_3}$，在$\triangle P_1AI_3$中

$\because \quad \angle I_3P_1A=\angle I_3P_1P_4+\angle P_4P_1A$ 且I_3為$\triangle P_1P_2P_4$之內心

$\therefore \quad \angle I_3P_1A=\angle P_2P_1I_3+\angle P_4P_1A=\angle P_2P_1I_3+\angle P_4P_2A$

$\qquad\qquad =\angle P_2P_1I_3+\angle P_1P_2I_3=\angle P_1I_3A$（外角定理）

$\therefore \quad \triangle P_1AI_3$為等腰三角形

$\therefore \quad \overline{I_3A}=\overline{P_1A}$

同理 $$\overline{I_2A}=\overline{P_4A}$$

又 $\because$ A為$\overset{\frown}{P_1P_4}$的中點

$\therefore \quad \overline{P_1A}=\overline{I_3A}=\overline{I_2A}=\overline{P_4A}$

$\therefore \quad P_1P_4I_2I_3$四點共圓（$A$點為圓心）

$\therefore\quad \overline{I_2I_3} \parallel \overline{BD}$

同理 $\overline{I_1I_4} \parallel \overline{BD}$，$\overline{I_3I_4} \parallel \overline{AC}$ 及 $\overline{I_1I_2} \parallel \overline{AC}$。

因此 $I_1I_2I_3I_4$ 爲矩形。

（註）本問題是本次競賽中，問題最難的一題。本國參賽的64位同學中有10位得滿分。有些學生試圖利用解析幾何（坐標幾何）或向量的方法來試圖解決此問題，但都沒有成功。事實上，在平面幾何的問題中，除非很有把握，知道如何定坐標（或設定向量），否則應該儘量往基本的綜合幾何上來考慮。

在證明垂直（夾角爲90°）的過程中，由於題意所給的資訊相當多，因此採取設定每個角爲未知數的方法，再去求其間的關係，可以比較有系統的從程式中看出夾角是90°，亦可容易看出四點共圓（P_2，I_4，I_1，P_3）的性質。（這是陳和麟同學及其它一些同學所採取的策略）

問題四：（本題是我國葉永南教授所命的考題，以下是唐孝鈞同學作法）

(1) 設全部17組的各組成員都是 k 人。令男生有 a 組，女生 $17-a$ 組。

由 $n = ak = (17-a)k \Rightarrow a = \dfrac{17}{2}$（不合）

因此不可能每組人數都一樣。

(2) 設有 a 組的成員是 k 人（$1 \leqslant a \leqslant 16$）；$17-a$ 組的成員是 $k+1$ 人。

① 若任一男人組的人數與任一女生組的人數均不同，則可設男生佔了 a 組成員是 k 人的組；女生佔了（$17-a$）組成員是 $k+1$ 人的組。

因此 $ak = (17-a)(k+1) = n$

$\Rightarrow\quad a(2k+1) = 17(k+1)$

因爲 $k+1$ 與 $2k+1$ 互質，所以

$$\begin{cases} 2k+1 = 17m \\ k+1 = am \end{cases} \Rightarrow m(2a-17) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ a = 9 \\ k = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n = ak = 72$$

② 設男生組與女生組恰有一組人數相同，將此二組消去不看；可設男生佔

了 a 個 k 人的組；女生佔了（15－a）個（k＋1）人的組。

因此 $ak=(15-a)(k+1)\Rightarrow a(2k+1)=15(k+1)$

同理可解得 $a=8$，$k=7\Rightarrow n=8\times7+7$ 或 $8\times7+8$

$\Rightarrow n=63$ 或 64。

③ 仿上，設有二組人數相同，消去此四組。

因此 $ak=(13-a)(k+1)\Rightarrow a(2k+1)=13(k+1)$

解得 $a=7$，$k=6\Rightarrow n=7\times6+(7+7)$ 或 $7\times6+(7+6)$

或 $7\times6+(6+6)\Rightarrow n=56$ 或 55 或 54。

④ 其餘完全相同，可得

$n=48$，47，46，45

$n=40$，39，38，37，36

$n=32$，31，30，29，28，27

$n=24$，23，22，21，20，19，18

$n=16$，15，14，13，12，11，10，9

(3) 綜合(1)與(2)得 $n\leqslant1996$ 的值為

$n=9$，10，11，12，13，14，15，16，18，19，20，21，22，23，24，27，28，29，30，31，32，36，37，38，39，40，45，46，47，48，54，55，56，63，64，72

（註）本問題是組合的問題，方法可以很多；但不論採用何種方法，都須細心的分類，才能得到所有的答案。事實上，訓練分類能力也是數學活動中相當重要的一個環節。本國參賽者在本題得滿分者約佔全部的七分之一。

問題五：設 x，y 為正數則我們有簡單不等式如下：

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant\sqrt{2(x+y)}。\qquad (*)$$

現在利用上述不等式得到

$$\begin{cases}\sqrt{a+b-c}+\sqrt{a+c-b}\leqslant\sqrt{2((a+b-c)+(a+c-b))}=2\sqrt{a}\\ \sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}\leqslant\sqrt{2((a+b-c)+(b+c-a))}=2\sqrt{b}\\ \sqrt{b+c-a}+\sqrt{a+c-b}\leqslant\sqrt{2((b+c-a)+(a+c-b))}=2\sqrt{c}\end{cases}$$

三式相加得到

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{a+c-b}+\sqrt{b+c-a}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}。$$

很容易發現：當 $x=y$ 時 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2(x+y)}$ （下轉第64頁）