中華民國參加1996年亞太數學奧林匹亞競賽研習營模擬試題參考解答及獨立研究試題

中華民國數學奧林匹亞委員會
訓練組、試題組提供

壹、模擬競試試題

編號：　　　　（學生自填）

注意事項：

(1) 本試卷共五題，每題滿分七分。
(2) 考試時間：4小時（08:00～12:00）。
(3) 計算紙必需連同試卷一起交回。
(4) 不可使用計算器。

問題一：(1) 設 $a, b, c > 0$ 且 $a^{1911} + b^{1911} + c^{1911} = 1$。試證：

$$a^{1996} + b^{1996} + c^{1996} \geq \frac{a^{85} + b^{85} + c^{85}}{3}$$。

(2) 設 $x, y, z, u > 0$。試證：

$$\frac{x^{1996}+y^{1996}+z^{1996}}{x^{1911}+y^{1911}+z^{1911}} + \frac{y^{1996}+z^{1996}+u^{1996}}{y^{1911}+z^{1911}+u^{1911}} + \frac{z^{1996}+u^{1996}+x^{1996}}{z^{1911}+u^{1911}+x^{1911}}$$

$$+ \frac{u^{1996}+x^{1996}+y^{1996}}{u^{1911}+x^{1911}+y^{1911}} \geq x^{85} + y^{85} + z^{85} + u^{85}$$

問題二：在銳角$\triangle ABC$中，D, E, F分別是A, B, C至對邊的垂足，H爲垂心。試證：在過H而與平面ABC垂直的直線上，必有一點P使得直線PA, PB與PC互相垂直，而且$\angle APD = \angle BPE = \angle CPF = 90^\circ$。

問題三：試證：無論 $a_3, a_4, \cdots, a_{85}$是任何實數，方程式

$$a_{85}x^{85} + a_{84}x^{84} + \cdots + a_3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

的根不全爲實數。

問題四：如果尤拉函數$\phi(n)$代表“不大於n且與n互質的自然數的個數”。試求所有滿足$\phi(n) = 36$的自然數n。

問題五：在某一正n邊形的頂點上依序標示有數字1，2，3，…，n。今某生在這n個

頂點上標示出另一組新的數字（注意：不同頂點可以標示相同的數字）且發現此新標示出的數字滿足：

(i) 每一頂點上新標示的數字不同於原先標示的數字。

(ii) 對每一頂點之相鄰的兩頂點上新標示的兩個數字和與原先的兩個數字和是一樣的。

試確定所有 n 的值。

貳、模擬競試參考解答

問題一參考解答

解1：注意到 $$x^{85}+y^{85}+z^{85}+u^{85}=\frac{x^{85}+y^{85}+z^{85}}{3}+\frac{y^{85}+z^{85}+u^{85}}{3}+\frac{z^{85}+u^{85}+x^{85}}{3}+\frac{u^{85}+x^{85}+y^{85}}{3} \quad\cdots\cdots(*)$$

僅須證明：$\dfrac{a^{1996}+b^{1996}+c^{1996}}{a^{1911}+b^{1911}+c^{1911}}\geq\dfrac{a^{85}+b^{85}+c^{85}}{3}$ ……(**) 對任意 $a,b,c>0$ 都成立。

上(**)式等價於

$$3(a^{1996}+b^{1996}+c^{1996})\geq(a^{1911}+b^{1911}+c^{1911})(a^{85}+b^{85}+c^{85})$$

$$\begin{aligned}2(a^{1996}+b^{1996}+c^{1996})\geq\ & a^{1911}b^{85}+a^{1911}c^{85}\\ &+b^{1911}a^{85}+b^{1911}c^{85}\\ &+c^{1911}a^{85}+c^{1911}b^{85}\quad\cdots\cdots(***)\end{aligned}$$

但 $a^{1996}+b^{1996}\geq a^{1911}b^{85}+b^{1911}a^{85}$

$b^{1996}+c^{1996}\geq b^{1911}c^{85}+c^{1911}b^{85}$

$c^{1996}+a^{1996}\geq c^{1911}a^{85}+a^{1911}c^{85}$

左、右相加得證(***)成立。　（臺灣師範大學數學系 陳昭地教授提供）

解2：(1) 不妨設 $a\geq b\geq c>0$

$\Rightarrow a^{85}\geq b^{85}\geq c^{85}>0$

且 $a^{1911}\geq b^{1911}\geq c^{1911}>0$

由切比雪夫不等式 $\Rightarrow a^{85}\cdot a^{1911}+b^{85}\cdot b^{1911}+c^{85}\cdot c^{1911}$

$$\geq\frac{(a^{85}+b^{85}+c^{85})(a^{1911}+b^{1911}+c^{1911})}{3}=\frac{a^{85}+b^{85}+c^{85}}{3}$$

$$\Rightarrow a^{1996}+b^{1996}+c^{1996} \geq \frac{a^{85}+b^{85}+c^{85}}{3}$$

(2) 不妨設 $x \geq y \geq z \geq u > 0$

$\Rightarrow x^{85} \geq y^{85} \geq z^{85} \geq u^{85} > 0$

且 $x^{1911} \geq y^{1911} \geq z^{1911} \geq u^{1911} > 0$

由切比雪夫不等式

$$\Rightarrow x^{1996}+y^{1996}+z^{1996} = x^{85}\cdot x^{1911}+y^{85}\cdot y^{1911}+z^{85}\cdot z^{1911}$$

$$\geq \frac{(x^{1911}+y^{1911}+z^{1911})(x^{85}+y^{85}+z^{85})}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x^{1996}+y^{1996}+z^{1996}}{x^{1911}+y^{1911}+z^{1911}} \geq \frac{x^{85}+y^{85}+z^{85}}{3} \cdots\cdots\cdots ①$$

同理 $$\frac{y^{1996}+z^{1996}+u^{1996}}{y^{1911}+z^{1911}+u^{1911}} \geq \frac{y^{85}+z^{85}+u^{85}}{3} \cdots\cdots\cdots ②$$

$$\frac{z^{1996}+u^{1996}+x^{1996}}{z^{1911}+u^{1911}+x^{1911}} \geq \frac{z^{85}+u^{85}+x^{85}}{3} \cdots\cdots\cdots ③$$

$$\frac{u^{1996}+x^{1996}+y^{1996}}{u^{1911}+x^{1911}+y^{1911}} \geq \frac{u^{85}+x^{85}+y^{85}}{3} \cdots\cdots\cdots ④$$

①＋②＋③＋④

$$\Rightarrow \frac{x^{1996}+y^{1996}+z^{1996}}{x^{1911}+y^{1911}+z^{1911}}+\frac{y^{1996}+z^{1996}+u^{1996}}{y^{1911}+z^{1911}+u^{1911}}+\frac{z^{1996}+u^{1996}+x^{1996}}{z^{1911}+u^{1911}+x^{1911}}$$

$$+\frac{u^{1996}+x^{1996}+y^{1996}}{u^{1911}+x^{1911}+y^{1911}} \geq x^{85}+y^{85}+z^{85}+u^{85}$$ 。

（研習營學生　台南一中　李卓穎提供）

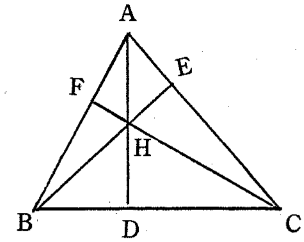
問題二參考解答

設△ABC 的三高爲 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$ 與 $\overline{CF}$

因爲A、B、D、E共圓，∴ $\overline{AH}\times\overline{HD}=\overline{BH}\times\overline{HE}$

同理 $\overline{AH}\times\overline{HD}=\overline{CH}\times\overline{HF}$

在包含$\overline{AD}$而與平面ABC垂直的平面上，以$\overline{AD}$爲一直徑作一圓，過H作此圓的一弦$\overline{PQ}$使得$\overline{PQ}\perp\overline{HD}$



我們欲證P點即合所求（Q點亦然）。

(1)　因爲P在以$\overline{AD}$爲直徑的圓上，

$\therefore \angle APD = 90°$

(2)　在$\triangle PBE$中，因爲高$\overline{PH}$滿足

$$\overline{PH}^2 = \overline{PH} \times \overline{HQ} = \overline{AD} \times \overline{HD} = \overline{BH} \times \overline{HE}$$

所以 $\angle BPE = 90°$　　同理， $\angle CPF = 90°$

(3)　因爲 $\angle PHB = \angle PHC = 90°$，所以

$$\begin{aligned}
\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 &= \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 + 2\,\overline{PH}^2 \\
&= \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 + 2\,\overline{BH} \times \overline{HE} \\
&= \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 + 2\,\overline{BH} \times \overline{CH} \cos \angle CHE \\
&= \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 - 2\,\overline{BH} \times \overline{CH} \cos \angle BHC \\
&= \overline{BC}^2
\end{aligned}$$

因此　$\angle BPC = 90°$，　即 $\overline{PB} \perp \overline{PC}$ ，

同理可證 $\overline{PC} \perp \overline{PA}$ ， $\overline{PA} \perp \overline{PB}$ 。

（臺灣師範大學數學系　趙文敏教授提供）

問題三參考解答

令 $y = \dfrac{1}{x}$ 考慮多項式

$$Q(y) = y^{85} + 2y^{84} + 3y^{83} + a_3 y^{82} + \cdots + a_{84} y + a_{85}$$

令 $S_1, \cdots, S_{85}$ 爲 $Q(y)$ 的根，就有

$$\sum_{i=1}^{85} S_i = -2 \text{ ，} \sum_{i<j} S_i S_j = 3$$

因此

$$\sum_{i=1}^{85} S_i^2 = 4 - 6 = -2$$

因此S_i不能全爲實數，所以此方程式的根也不能全是實數。

（中央研究院數學研究所　于　靖教授提供）

問題四參考解答

我們都知道，如果

$$n = \prod_{i=1}^{l} p_i^{n_i} \text{ ，}$$

其中 $n_1, n_2, \cdots, n_l$ 爲自然數， $p_1, p_2, \cdots, p_l$ 爲相異的質數，則尤拉函數 $\phi(n)$

的公式為

$$\phi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_l}\right)$$

如果質數 p 整除 n 則由上述公式得到

$$p-1=\phi(p)\leq\phi(n)=36 \Rightarrow p\leq 37$$

因此整除 n 的質數可能值如下：

$$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37$$

因為 $\phi(11)=10$，$\phi(17)=16$，$\phi(23)=22$，$\phi(29)=28$，$\phi(31)=30$ 皆不能整除 $\phi(n)=36$，由尤拉公式知道，整除 n 的質數可能值變成如下：

$$2,3,5,7,13,19,37$$

現在分幾種情形討論：

(1) 如果質數 $37\mid n$ 則

$$\begin{cases}\phi(37)=36\\ \phi(n)=36 \Rightarrow n=37 \text{ 或 } 2\times 37\\ 37\mid n\end{cases}$$

(2) 如果質數 $19\mid n$ 則

$$\begin{cases}\phi(19)=18\\ \phi(n)=36=18\cdot 2 \Rightarrow n=3\times 19 \text{ 或 } 2\times 3\times 19 \text{ 或 } 2^2\times 19\\ 19\mid n\end{cases}$$

(3) 如果質數 $13\mid n$ 則

$$\begin{cases}\phi(13)=12\\ \phi(n)=36=12\cdot 3 \Rightarrow n \text{ 無解}\\ 13\mid n\end{cases}$$

(4) 如果質數 $7\mid n$ 則

$$\begin{cases}\phi(7)=6\\ \phi(n)=36=6\cdot 6 \Rightarrow n=3^2\times 7 \text{ 或 } 2\times 3^2\times 7\\ 7\mid n\end{cases}$$

(5) 如果質數 $5\mid n$ 則

$$\begin{cases}\phi(5)=4\\ \phi(n)=36=4\cdot 9 \Rightarrow n \text{ 無解}\\ 5\mid n\end{cases}$$

(6)　如果 $n=2^a\cdot 3^b$ 則

$$2^2\cdot 3^2=36=\phi(n)=2^a\cdot 3^{b-1}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=3\end{cases}\Rightarrow n=2^2\times 3^3$$

綜合上述，我們得到

$$n=37,57,63,74,76,108,114,126$$

（臺灣師範大學數學系　許志農教授提供）

問題五參考解答

解答：當 n 是4的倍數時，該生可以標示出滿足條件的數字

設該生標示的數字依序為 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，則依題意知

$$a_1+a_3=1+3$$
$$a_2+a_4=2+4$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_{n-2}+a_n=(n-2)+n$$
$$a_{n-1}+a_1=(n-1)+1$$
$$a_n+a_2=n+2$$
$$a_k\neq k,\ \forall k=1,2,\cdots,n$$

因為

$2(a_1+a_2+\cdots+a_n)=(a_1+a_3)+(a_2+a_4)+(a_3+a_5)+(a_4+a_6)+\cdots+(a_{n-1}+a_1)+(a_n+a_2)=(1+3)+(2+4)+(3+5)+(4+6)+\cdots+(n-1+1)+(n+2)=2(1+2+\cdots+n)$

故

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=1+2+\cdots+n \qquad (*)$$

(i) 若 $n=4k+1$，由 $(*)$ 我們可重排分類如下

$[(a_1+a_3)+(a_2+a_4)+\cdots+(a_{n-4}+a_{n-2})+(a_{n-3}+a_{n-1})]+a_n$

$=[(1+3)+(2+4)+\cdots+(n-4+n-2)+(n-3+n-1)]+n$

得知 $a_n=n$（矛盾）。

(ii) 若 $n=4k+2$，由 $(*)$ 我們可重排分類如下

$[(a_1+a_3)+(a_2+a_4)+\cdots+(a_{n-5}+a_{n-3})+(a_{n-4}+a_{n-2})]+a_{n-1}+a_n$

$=[(1+3)+(2+4)+\cdots+(n-5+n-3)+(n-4+n-2)]+n-1+n$

得知 $a_{n-1}+a_n=n-1+n=2n-1$。同樣地，若重排分類如下

$a_1+[(a_2+a_4)+(a_3+a_5)+\cdots+(a_{n-3}+a_{n-1})]+a_n$

$=1+[(2+4)+(3+5)+\cdots+(n-3+n-1)]+n$

得知 $a_1+a_n=1+n$。如此，$a_1+a_{n-1}+2a_n=2n-1+1+n=3n$。但 $a_1+a_{n-1}=1+n-1=n$，故 $a_n=n$（矛盾）。

(iii)若 $n=4k+3$，由 (*) 我們可重排分類如下

$$[(a_1+a_3)+(a_2+a_4)+\cdots+(a_{n-5}+a_{n-3})+(a_{n-2}+a_n)]+a_{n-1}$$
$$=[(1+3)+(2+4)+\cdots+(n-5+n-3)+(n-2+n)]+n-1$$

得知 $a_{n-1}=n-1$（矛盾）。

由以上的討論知 n 只可能是 4 的倍數，現在我們證明當 n 是 4 的倍數時，該生可標示的一組數字如下：

$n=4$ —— 2，3，2，3

$n=8$ —— 2，3，2，3，6，7，6，7

$n=12$ —— 2，3，2，3，6，7，6，7，10，11，10，11

$n=16$ —— 2，3，2，3，6，7．6，7，10，11，10，11，14，15，14，15

再由數學歸納法或遞迴公式知，當 $n=4k$ 而該生標示的數字爲

$$a_{4m+1}=a_{4m+3}=4m+2,\ \forall m=0,1,2,\cdots,(k-1)$$
$$a_{4m+2}=a_{4m+4}=4m+3,\ \forall m=0,1,2,\cdots,(k-1)$$

則 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 滿足所求。

註明：事實上，當 n 是 4 的倍數時，該生可標示的數字不唯一（也不必是正整數）。只要先確定前兩個數就可唯一確定所有的數，設前四數爲 a,b,c,d，則 $a\neq 1$，$b\neq 2$，$c=4-a$，$d=6-b$ 而可標示的數字爲

$a,b,c,d,a+4,b+4,c+4,d+4,a+8,b+8,c+8,d+8,a+12,b+12,c+12,d+12,\cdots$。

第 1 部分另解（Mi）：

由觀察知連續四項之和對應相等，即

$$a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3}=k+(k+1)+(k+2)+(k+3),\ \forall k$$

(i) 若 $n=4k+1$，由 (*) 我們消掉末 $n-1$ 項得 $a_1=1$（矛盾）。

(ii) 若 $n=4k+2$，由 (*) 我們消掉末 $n-2$ 項得 $a_1+a_2=1+2$。同理 $a_2+a_3=2+3$，兩式相減得 $a_1-a_3=1-3$。再由已知 $a_1+a_3=1+3$ 得 $a_1=1$，$a_3=3$（矛盾）。

(iii)若 $n=4k+3$，由 (*) 我們消掉末 $n-3$ 項得 $a_1+a_2+a_3=1+2+3$。再由已

知 $a_1+a_3=1+3$ 得 $a_2=2$（矛盾）。

因此，由以上的討論知 $n\equiv 1,2$，或 $3\ (mod\ 4)$ 時，該生不可能另外標示出滿足條件的數字。

第1部分另解（Mii）：

將原聯立方程組寫成矩陣等式爲

$$\begin{bmatrix} 1\,0\,1\,0\,0\,0 & \cdots & 0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1\,0\,0 & \cdots & 0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,1\,0 & \cdots & 0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,1 & \cdots & 0\,0\,0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0 & \cdots & 1\,0\,1 \\ 1\,0\,0\,0\,0\,0 & \cdots & 0\,1\,0 \\ 0\,1\,0\,0\,0\,0 & \cdots & 0\,0\,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 \\ 2+4 \\ 3+5 \\ \vdots \\ n+2 \end{bmatrix}$$

再證明上式左邊 n 階方陣之行列式不等於0的充要條件爲 $n\equiv 1,2$，或 $3\ (mod\ 4)$，亦即此時恰有一組解 $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)=(1,2,3,\cdots,n)$，故此時該生不可能另外標示出滿足條件的數字。　（臺灣師範大學數學系　朱亮儒教授提供）

参、獨立研究題

獨立研究題(一)　鴿籠原理（研究作答時間100分鐘）

問題1-1　試證：任意三個相異整數中一定有二個整數 a,b 使得

$$a^3b-ab^3$$

是30的倍數。　　（中央研究院數學研究所　葉永南教授提供）

問題1-2　(1)　證明存在不全爲0的整數 a,b（$|a|<10^5$，$|b|<10^5$）滿足

$$|a+b\sqrt{73}|<10^{-4}$$

(2)　若不全爲0的整數 a,b 滿足 $|a|<10^5$，$|b|<10^5$；證明：

$$|a+b\sqrt{73}|>10^{-6}$$

（臺灣師範大學數學系　許志農教授提供）

獨立研究題(二)　簡易數論（研究作答時間100分鐘）

問題2-1　數學家知道：恰存在一個自然數 n 使得

$$120^4+272^4+315^4+n^4=353^4$$

試求自然數 n 的值。　（臺灣師範大學數學系　許志農教授提供）

問題2-2　設$(abcd)_{10}$表示一個數字不全相同的四位數，將此四位數的各位數字重新排列必可得一個最大數M及一個最小數m（例如7981經重新排列後最大$M=9871$，最小$m=1789$）。試確定所有a,b,c,d（不全相同）使得

$$m+(abcd)_{10}=M$$

（臺灣師範大學數學系　陳昭地教授提供）

獨立研究題(三)　幾何（研究作答時間100分鐘）

問題3-1　在$\triangle ABC$中，D、E與F分別為$\overline{BC}$、$\overline{CA}$與$\overline{AB}$上一點，$\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\alpha$，$\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\beta$，$\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\gamma$。過$D$、$E$、$F$各作一直線分別與$\overline{CA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$平行。

試證：此三直線共點之充要條件為$\alpha\beta\gamma-(\alpha+\beta+\gamma)=2$。

（臺灣師範大學數學系　趙文敏教授提供）

問題3-2　以$\triangle ABC$的各邊為一邊，分別向外作三角形$\triangle BCD$, $\triangle CAE$與$\triangle ABF$，使得$\angle BAF=\angle CAE$, $\angle ABF=\angle CBD$, $\angle ACE=\angle BCD$。試證：直線AD, BE與CF共點。　（臺灣師範大學數學系　趙文敏教授提供）

獨立研究題(四)　不等式（研究作答時間100分鐘）

問題4-1　設a,b,c,d均為正數，且滿足$a+b+c+d=1$，證明

$$\frac{a}{\sqrt{1-a}}+\frac{b}{\sqrt{1-b}}+\frac{c}{\sqrt{1-c}}+\frac{d}{\sqrt{1-d}}\geq\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

（臺灣師範大學數學系　黃文達教授提供）

問題4-2　設$a_1,a_2,\cdots,a_n$均為正數且滿足$a_1a_2\cdots a_n=1$，證明

$$a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n\geq a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\cdots+a_n^{n-1}\geq\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$

（臺灣師範大學數學系　黃文達教授提供）

問題4-3　設$x_1,x_2,\cdots,x_n$是n個正實數且m為自然數，試證明：

$$\frac{x_1^{m+1}+x_2^{m+1}+\cdots+x_n^{m+1}}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\geq\frac{x_1^m+x_2^m+\cdots+x_n^m}{n}$$

（試題組提供）

獨立研究題(五)　遞迴數列（研究作答時間100分鐘）

問題5-1　觀察下列類似巴斯卡（Pascal）三角形陣列，其中每一列除旁邊的兩數外

中間的每一數是上一列對應相鄰兩數之和。試確定所有可能的正整數 n 使得第 n 列中所有的數之和是35的倍數。

$$\begin{array}{c}
1 \\
2 \quad 3 \\
3 \quad 5 \quad 6 \\
4 \quad 8 \quad 11 \quad 9 \\
5 \quad 12 \quad 19 \quad 20 \quad 12 \\
6 \quad 17 \quad 31 \quad 39 \quad 32 \quad 15 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

（臺灣師範大學數學系　朱亮儒教授提供）

問題5-2　兄弟兩人計畫每天將父母給他們的零用錢分別存入錢筒中。已知第一天兄弟各存入1元及3元，第二天兄弟分別存入2元及1元。自第三天起父親每天給兄的零用錢剛好是前一天弟存入的金額而給弟的零用錢剛好是前一天兄存入的金額；母親每天給兄的零用錢剛好是前一天兄存入金額的兩倍而給弟的零用錢剛好是前一天弟存入金額的兩倍。問一年後兄弟的總存款各多少？

（臺灣師範大學數學系　朱亮儒教授提供）

問題5-3　設 f 是一個由非負整數映至非負整數的函數且滿足：對所有非負整數 m，n

(1)　$f(f(m))+f(f(n))=m+n$

(2)　$f(m+n)=f(m)+f(n)$

試求 $f(1996)=$？

（臺灣師範大學數學系　張幼賢教授提供）

★