教育部八十四學年度高級中學數學能力競賽決賽試題與參考解答

國立臺灣師範大學數學系提供

壹、試題

筆試試題(一)

注意事項：(1) 時間分配：2小時，12月30日（10:00 - 12:00）
(2) 配分：第一、二題11分，第三題13分，總計35分。
(3) 不可使用計算器。

問題一、設實數 a, b, c, d 滿足以下兩個等式：

$$a+b+c+d=6$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2=12$$

試求 d 的最大值。

問題二、試確定所有整數 n 的值，使得

$$\left| n^5+25n^2-n+25 \right|$$

是一個質數或是兩個質數（可以相同）的乘積。

問題三、已知

性質一：拋物線的任意兩條相異的切線必相交。

性質二：拋物線的焦點對此拋物線的每條切線的對稱點都落在該拋物線的準線上。

試利用上述性質證明：拋物線的任意三條相異切線，兩兩相交所得的三個交點必與該拋物線的焦點共圓。

筆試試題(二)

注意事項：(1) 時間分配：2小時，12月30日（14:00 - 16:00）
(2) 配分：第四、五題11分，第六題13分，總計35分。
(3) 不可使用計算器。

問題四、設 a,b,c,d 爲實數，其中 $ac\neq 0$。若拋物線 $y=ax^2+b$ 與拋物線 $x=cy^2+d$ 相交於四個點，試證這四個點共圓，並求此圓之圓心坐標及半徑（以 a,b,c,d 表示）。

問題五、試求滿足下列條件的最小自然數 n：對所有的自然數 p,q 恆有

$$\left|\sqrt{2}-\frac{q}{p}\right|>\frac{1}{np^2}。$$

（需加以證明）

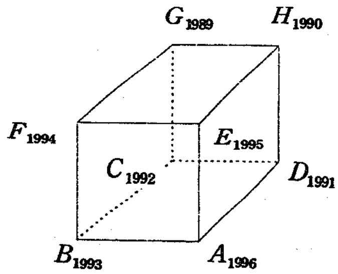
問題六、設集合 $A=\{0,1,2,3,4,5\}$。若函數 $f:A\to A$ 滿足：對任意 $x,y\in A$ 且 $y\equiv 2x \pmod 6$ 恆有

$$f(y)\equiv 2f(x) \pmod 6,$$

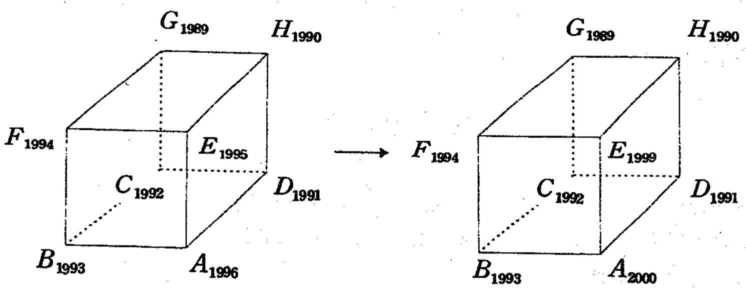
則稱 f 是好函數；試問有多少從 A 映到 A 的好函數。

口試試題(一)

設想在正立方體 $ABCD$ - $EFGH$ 的每個頂點標示一個整數（如下圖所示）。



每次我們將其中一條邊上的兩個頂點所標示的數加上同一個整數，而其它各頂點所標示的數不變，這樣的過程就叫做“操作一次”。例如，原先各頂點所標示的數如上圖所示，我們將頂點 A，E 所標的數同加 4，其餘頂點所標示的數不變；如下圖所示就是操作一次。



試確定下列各種情形中，那些能經由有限次操作後，使得正立方體的各頂點所標示的數相同：

(1) 頂點A標示1996，B標示1995，G標示1991，其餘各頂點均標示1990。

(2) 頂點A標示1996，其餘各頂點均標示1995。

(3) 頂點A與C均標示1996，其餘各頂點均標示1995。

口試試題(二)

(1) 給定平面上三個相異點M_1，M_2，M_3，是否可找到三個點

$$A_1\ ,\ A_2\ ,\ A_3$$

使得M_1是$\overline{A_1A_2}$的中點；M_2是$\overline{A_2A_3}$的中點；M_3是$\overline{A_3A_1}$的中點。

(2) 給定點改成四點M_1，M_2，M_3，M_4時，是否可找到四個點

$$A_1\ ,\ A_2\ ,\ A_3\ ,\ A_4$$

滿足類似上述的性質。

獨立研究試題(一)

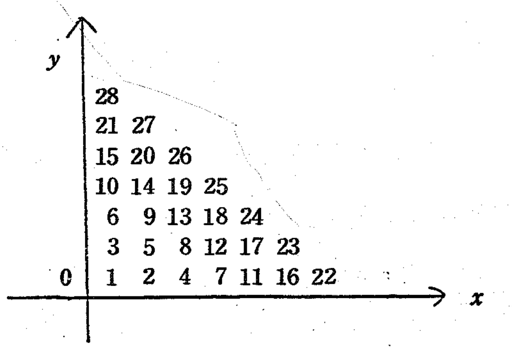
注意事項：(1) 時間分配：2 小時（08:10 - 10:00）

(2) 配分：第一、二、三題6分，第四題7分，總計25分。

(3) 不可使用計算器。

問題一、從1，2，3，4，5，6，7，8，9這九個數字中挑出三個不同的數字，再將這三個不同數字排成6個3位數。若這6個3位數的總和介於3600與4000之間。試問這個數字的選法共有幾種？

問題二、將所有正整數在座標平面之第一象限內依照下圖所示的方法加以排列：



試問：

(a) 1995所在位置的上、下、左、右位置上的數各爲多少？

(b) (i,j)位置上的數是多少？（以 i,j 表示）其下及右位置上的數的和是多少？（以 i,j 表示）其上及左位置上的數的和是多少？（以 i,j 表示）

問題三、試求所有滿足下述條件的正整數 n（$n \geqslant 3$）：任意 n 個點，其中任意三點都不共線，都可被編號爲 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 使得異於直線 $\overline{A_1A_2}$ 的直線 $\overline{A_iA_j}$（$i \neq j$）都不會與線段 $\overline{A_1A_2}$ 相交或僅相交於線段 $\overline{A_1A_2}$ 的端點。

問題四、試問有多少個小於 27000 但大於 1000 的正整數 n 可滿足下述條件：

$$n = 1000a + b$$

$$n \equiv a \pmod{37} \text{ 其中 } a, b \text{ 爲正整數且 } b \leqslant 999$$

$$n \equiv b \pmod{125}$$

例如

$$18259 = 1000 \times 18 + 259$$

$$18259 \equiv 18 \pmod{37}$$

$$18259 \equiv 259 \pmod{125}$$

獨立研究試題(二)

注意事項：(1) 時間分配：2 小時（10:10 - 12:00）

(2) 配分：第五、六、七題 6 分，第八題 7 分，總計 25 分。

(3) 不可使用計算器。

問題五、試舉例證明下列敍述不一定正確：

(1) 對於任意正數 x,y 與 z $(x^3+y^3+z^3)(x+y+z) \geq xyz(x^2+y^2+z^2)$

(2) 對於任意正數 x,y 與 z $(x^3+y^3+z^3)(x+y+z) \leq xyz(x^2+y^2+z^2)$

問題六、設 $x>0$，$y>0$，$z>0$ 且 $x^2+y^2+z^2=1$，試求 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}$ 的最小值。

問題七、設 a,b,c 均爲正數且 $a+b+c=1$，試證：

$$\frac{a}{1+b+c}+\frac{b}{1+c+a}+\frac{c}{1+a+b} \geq \frac{3}{5}$$

問題八、試證：對於任意大於 1 的整數 n，恆有

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

獨立研究試題(三)

注意事項：(1) 時間分配：2 小時（14:10 - 16:00）
(2) 配分：第九、十、十一題 6 分，第十二題 7 分，總計 25 分。
(3) 不可使用計算器。

問題九、已知函數 $f: N \to R$ 滿足 $f(1)=-1$ 且對於任意正整數 n，

$$f(n+1)=\frac{1+f(n)}{3-f(n)}$$

(1) 試求 $f(84)$ 與 $f(1995)$ 之值。

(2) 試以 n 表示 $f(n)$，並加以說明。

問題十、設奇質數 p 可以表為兩個正整數的平方和。試證這種表示方法僅有這一種而已。

問題十一、若 a，b，c 為有理數且 $a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c=0$。試證 a，b，c 的值均為0。

問題十二、試求質數 p, q 與 r，使得 $p^2+35=q^2 r$。

獨立研究試題(四)

注意事項：(1) 時間分配：2 小時（16:10 - 18:00）
(2) 配分：第十三、十四、十五題 6 分，第十六題 7 分，總計 25 分。
(3) 不可使用計算器。

問題十三、已知實係數多項式 $f(x)$ 滿足 $f(x^2)=f(x+1)f(x-1)$，試證方程式 $f(x)=0$ 無實根。

問題十四、設 R^+ 表示所有正實數所成的集合。若函數 $f: R^+ \to R$ 滿足：對於任意 x，$0<x<\frac{\pi}{2}$，恆有 $f(\tan x)+2f(\cot x)=\sin 2x+\cos 2x$。試求函數 f。

問題十五、試求所有滿足下列條件的實係數多項函數

$$p(x):\ p((x+1)^3)=p(x^3)+3x^2+3x+1$$

問題十六、試求所有滿足下列條件的實係數多項函數 $p(x)$：對於任意實數 x 與 y，恆有

$$p(x^2-y^2)=p(x+y)p(x-y)$$

專題研討試題

注意事項：(1) 時間分配：2小時（19:20 - 21:00）
(2) 配分：第一、二、三題6分，第四題7分，總計25分。
(3) 不可使用計算器。

問題一、若凸四邊形 $ABCD$ 的兩組對邊之長的和相等，即 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$，試證此四邊形外切於一圓。

問題二、試證圓內接四邊形 $ABCD$ 兩對角線的乘積等於兩組對邊乘積之和（即 $\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}$）

問題三、若凸四邊形 $ABCD$ 的三個頂點 A，B，D 都在圓 O 上，另一頂點 C 在圓 O 的內部。試證：$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}\geq\overline{AC}\cdot\overline{BD}$

問題四、在 $\angle A$ 的分角線上任取一點 L，過 L 點引一直線交 $\angle A$ 的兩邊於 B、C 兩點，並自 L 點作 $\overline{LK}\perp\overline{AB}$，$\overline{LM}\perp\overline{AC}$（$K$，$L$ 爲垂足），再作圓 O 外接 $\triangle ABC$。若 $\angle A$ 的分角線交圓 O 於 N 點，試證四邊形 $AKNM$ 的面積等於 $\triangle ABC$ 的面積。

貳、參考解答

筆試試題

問題一

令
$$6-d=a+b+c$$
$$12-d^2=a^2+b^2+c^2$$

於是由柯西不等式得

$$(6-d)^2\leq 3(12-d^2)$$
$$\Rightarrow 36-12d+d^2\leq 36-3d^2$$
$$\Rightarrow 4d^2-12d\leq 0$$

因此 $0\leq d\leq 3$。d 的最大值爲 3，因爲 $a=b=c=1$ 時，$d=3$。

問題二

$$n^5+25n^2-n+25=(n^2+1)(n^3-n+25)$$
$$\Rightarrow n^5+25n^2-n+25\equiv 0 \pmod 5$$
$$\Rightarrow 5\mid(n^2+1) \text{ 或 } 5\mid(n^3-n+5)$$

由題意知道：僅有下列的情形

(1) $n^2+1=-1 \Rightarrow n$ 無解。

(2) $n^2+1=1 \Rightarrow n=0 \Rightarrow n^5+25n^2-n+25=5^2$。

(3) $n^2+1=5 \Rightarrow n=2,-2 \Rightarrow n^5+25n^2-n+25=5\cdot 31, 5\cdot 19$。

(4) $n^2+1=-5 \Rightarrow n$ 無解。

(5) $n^3-n+25=1 \Rightarrow n=-3 \Rightarrow n^5+25n^2-n+25=2\cdot 5$。

(6) $n^3-n+25=-1 \Rightarrow n$ 無解。

(7) $n^3-n+25=5 \Rightarrow n$ 無解。

(8) $n^3-n+25=-5 \Rightarrow n$ 無解。

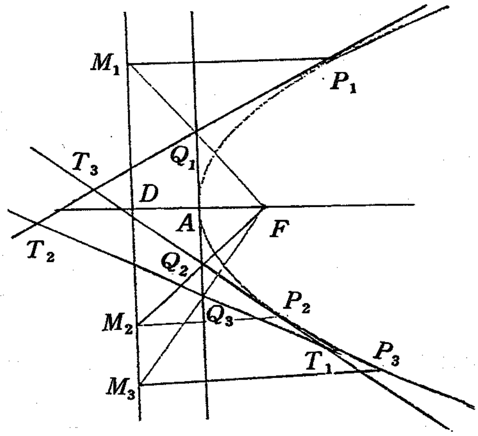
因此 $n=2,0,-2,-3$ 是僅有的四個解。

問題三

設三切點分別為 P_1、P_2 與 P_3，焦點 F 對三切線的對稱點分別為 M_1、M_2 與 M_3，它們都在準線上。設三切線與過頂點的切線分別交於 Q_1、Q_2 與 Q_3，又切線 $\overline{P_2Q_2}$ 與 $\overline{P_3Q_3}$ 交於 T_1；切線 $\overline{P_3Q_3}$ 與 $\overline{P_1Q_1}$ 交於 T_2，切線 $\overline{P_1Q_1}$ 與 $\overline{P_2Q_2}$ 交於 T_3。

(1) 先證明：$\overline{P_1M_1}$、$\overline{P_2M_2}$ 與 $\overline{P_3M_3}$ 都與準線垂直。

因為 P_1 在 $\overline{FM_1}$ 的垂直平分線 $\overline{P_1Q_1}$ 上，所以，$\overline{P_1M_1}=\overline{P_1F}$。依拋物線的定義，$\overline{P_1F}$ 與點 P_1 至準線的距離相等。因為 M_1 在準線上而 $\overline{P_1M_1}$ 等於 P_1 至準線的距離，所以 $\overline{P_1F}$ 與準線垂直。



(2) 其次證明：Q_i 是 $\overline{FM_i}$ 的中點（$i=1,2,3$）；所以 $\overline{FQ_1}\perp\overline{P_1Q_1}$，$\overline{FQ_2}\perp\overline{P_2Q_2}$，$\overline{FQ_3}\perp\overline{P_3Q_3}$。

設焦點 F 至準線的垂足為 D。因為頂點 A 是 $\overline{FD}$ 的中點，而過 A 的切線與準線平行，所以過 A 的切線必過 $\overline{FM_1}$ 的中點。依題目所述的性質，$\overline{FM_1}$ 的中點在過 P_1 的切線上，由此可知：$\overline{FM_1}$ 的中點就是過 P_1 的切線與過 A 的切線的交點 Q_1。

(3) 最後證明：F、T_1、T_2 與 T_3 共圓。

因為 $\angle FQ_1T_3=\angle FQ_2T_3=90°$，所以 F、Q_1、Q_2 與 T_3 四點共圓。於是

$\angle FT_3T_1=\angle FT_3P_2=\angle FT_3Q_2=\angle FQ_1Q_2$。同理，因爲$F$、$Q_1$、$Q_3$與$T_2$共圓，所以$\angle FT_2T_1=\angle FT_2P_3=\angle FT_2Q_3=\angle FQ_1Q_3=\angle FQ_1Q_2$。由此可知：$\angle FT_3T_1=\angle FT_2T_1$，點$F$、$T_1$、$T_2$與$T_3$共圓。

問題四

由題意知，此四交點必落在二次曲線上；

$$c(ax^2+b-y)+a(cy^2+d-x)=0$$

整理後爲

$$acx^2+acy^2-ax-cy+ad+bc=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-\frac{x}{c}-\frac{y}{a}+\frac{ad+bc}{ac}=0$$

$$\Rightarrow (x-\frac{1}{2c})^2+(y-\frac{1}{2a})^2=\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4c^2}-\frac{ad+bc}{ac}$$

因此，此四點落在以$(\frac{1}{2c},\frac{1}{2a})$爲圓心

半徑是 $$\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4c^2}-\frac{ad+bc}{ac}}$$

的圓上。

問題五

由 $$\frac{1}{2}>\left|\sqrt{2}-\frac{1}{1}\right|>\frac{1}{n}$$

得知$n\geq 3$，底下證明$n=3$是最小的可能值，分三種情形討論。

(i) 若$\frac{q}{p}$是一個自然數則$p=1$，$\frac{q}{p}=q$

$$|\sqrt{2}-q|\geq 0.4>\frac{1}{3\cdot 1^2}。$$

(ii) 若$0<\frac{q}{p}\leq\frac{3}{2}$則$\sqrt{2}+\frac{q}{p}<\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$

$$\left|2-\frac{q^2}{p^2}\right|=\left|\sqrt{2}-\frac{q}{p}\right|\left|\sqrt{2}+\frac{q}{p}\right|<3\left|\sqrt{2}-\frac{q}{p}\right|$$

$$\Rightarrow \left|\sqrt{2}-\frac{q}{p}\right|>\frac{|2p^2-q^2|}{3p^2}\geq\frac{1}{3p^2}。$$

(iii) 若$\frac{q}{p} \geq \frac{3}{2}$且 $p \geq 2$ 則

$$\left| \sqrt{2} - \frac{q}{p} \right| \geq \frac{3}{2} - \sqrt{2} \geq \frac{1}{3 \cdot 2^2} \geq \frac{1}{3 \cdot p^2} \text{。}$$

綜合(i)，(ii)，(iii)證得 $n = 3$ 是最小的可能值。

問題六

$$\begin{cases} 0 \equiv 2 \times 0 \pmod 6 \\ 0 \equiv 2 \times 0 \pmod 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) \equiv 2 \times f(0) \pmod 6 \\ f(0) \equiv 2 \times f(3) \pmod 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(0) \equiv 0 \\ f(3) \equiv 0 \text{ 或 } 3 \end{cases}$$

令 $f(1) = a$ 則

$$\begin{cases} f(2) \equiv 2 \times a \pmod 6 \\ f(4) \equiv 2 \times f(2) \equiv 4 \times a \pmod 6 \\ 2 \times f(5) \equiv f(4) \equiv 4 \times a \pmod 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(5) \equiv 2a \text{ 或 } 2a+3$$

由下面四個表，可以發現 a 可以是集合 A 中之任何元素

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	a	$2a$	0	$4a$	$2a$

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	a	$2a$	0	$4a$	$2a+3$

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	a	$2a$	3	$4a$	$2a$

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	a	$2a$	3	$4a$	$2a+3$

所以共有 $2 \times 6 \times 2 = 24$ 個。

口試試題

題一

(1) 可經由如下四步驟達成

$$
\begin{aligned}
& (A, B, C, D, E, F, G, H) \\
= & (1996, 1995, 1990, 1990, 1990, 1990, 1991, 1990) \\
\rightarrow & (1996, 1995, 1990, 1990, 1996, 1996, 1991, 1990) \\
\rightarrow & (1996, 1995, 1990, 1996, 1996, 1996, 1995, 1996) \\
\rightarrow & (1996, 1995, 1995, 1996, 1996, 1996, 1996, 1996) \\
\rightarrow & (1996, 1996, 1996, 1996, 1996, 1996, 1996, 1996)
\end{aligned}
$$

(2) 因爲各頂點所代表的數的總和爲奇數（一偶七奇）；但是每經一次操作後，各頂點所代表的數的總和是比前一次的總和多出一個偶數。因此無論經過多少次操作，都不可能將一偶七奇的數變成八個完全相同的數字（因爲此時各頂點所代表的數的總和是偶數）。

(3) 因爲 A，F，C，H 四頂點所代表數的總和 m 跟 G，B，E，D 四頂點所代表數的總和 n 不同（相差爲 2）。由於每操作一次時，m 與 n 的值同時加上一個數字；因此無論經過多少次操作，都不可能將原來不一樣的數字 m 與 n 變成相同的數字。

題二

(1)(a) M_1，M_2，M_3 三點不在同一直線上的情形：

連接 $\overline{M_1M_2}$，$\overline{M_2M_3}$，$\overline{M_3M_1}$；過 M_1 點作直線 L_1 平行 $\overline{M_2M_3}$；過 M_2 點作直線 L_2 平行 $\overline{M_3M_1}$；過 M_3 點作直線 L_3 平行 $\overline{M_1M_2}$。設此三直線 L_1，L_2，L_3 兩兩相交於 A_1，A_2，A_3 則此三點即爲所求的三個點。

(b) M_1，M_2，M_3 三點在同一直線上：

設此三點 M_1，M_2，M_3 的座標分別爲 a，b，c。設所求三點 A_1，A_2，A_3 的座標分別爲 x，y，z 則

$$a=\frac{x+y}{2},\quad b=\frac{y+z}{2},\quad c=\frac{z+x}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=2a \\ y+z=2b \\ z+x=2c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x+y+z=a+b+c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a - b + c \\ y = a + b - c \\ z = -a + b + c \end{cases}$$

(2) 設M_i 的座標為 (a_i, b_i)，$(i = 1,2,3,4)$；A_i 的座標為 (x_i, y_i)，$(i = 1,2,3,4)$ 則有

$$\begin{cases} \dfrac{x_1 + x_2}{2} = a_1 \\ \dfrac{x_2 + x_3}{2} = a_2 \\ \dfrac{x_3 + x_4}{2} = a_3 \\ \dfrac{x_4 + x_1}{2} = a_4 \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a_1 \\ x_2 + x_3 = 2a_2 \\ x_3 + x_4 = 2a_3 \\ x_4 + x_1 = 2a_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2a_1 + 2a_3 = 2a_2 + 2a_4$$

若 $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = 0$ 時，可取 $x_4 = t$ 解得

$$\begin{cases} x_4 = t \\ x_1 = 2a_4 - t \\ x_3 = 2a_3 - t \\ x_2 = 2a_2 - x_3 = 2a_2 - 2a_3 + t \end{cases}$$ ，其中 t 為任意實數。

同理可證得：在 $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 = 0$ 時，y_1, y_2, y_3, y_4 的解為

$$\begin{cases} y_4 = s \\ y_1 = 2a_4 - s \\ y_3 = 2a_3 - s \\ y_2 = 2a_2 - 2a_3 + s \end{cases}$$ ，其中 s 為任意實數。

因此當$M_1M_2M_3M_4$ 構成平行四邊形（如果是$M_1M_2M_3M_4$ 四點共線時，必須是M_1，M_3 點的中點與M_2，M_4 點的中點重合）時，可以找到滿足題意的四點A_1，A_2，A_3，A_4。

★