關於三邊長皆爲整數的直角三角形的一些性質

邱坤毅
省立台東高級中學

一、前　　言

民國63年大學聯考自然組有一道試題如下：

設m，n爲任意自然數且$m>n$，令$x=m^2-n^2$，$y=2mn$，$z=m^2+n^2$則下列各敍述何者恆成立(A) $x<y$　(B) $x+y>z$　(C) x，y中必有一數爲4的倍數　(D) x，y中必有一數爲3的倍數　(E) x，y，z中必有一數爲5的倍數。因此題是選擇題，考生可代入數字發現x，y，z構成直角三角形的三邊長可以歸納的方式猜出答案。但令人感到興趣的是：任意三邊長爲整數的直角三角形是否都可找到$m,n\in N$且$m>n$使三邊長爲m^2-n^2，$2mn$，m^2+n^2？以下內容除了證明我們的猜測外，儘量以高一、二的數學教材爲基礎，希望能提供一些數學知識給中學生，這是此篇文章的最大目的，因才疏學淺，望諸位先進不吝賜教。

二、內　容

很多高中生對於上述的問題，他們會直覺地認爲$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$故知$m^2-n^2$，$2mn$，$m^2+n^2$可構成直角三角形的三邊長，這種把結果代入條件的錯誤邏輯相當常見，個人的一點淺見，不妨舉些學生熟悉的例子如：(3,4,5),(5,12,13),(7,24,25),(8,15,17)……(見本文後的附註)讓他們試著去找m，n，從實驗中了解，至少比我們在黑板上解釋半天還有效。以下展開我們的尋求：

定理1：$u,v,w\in N$爲直角三角形的三邊長（w爲斜邊長）

則$(u,v)=(v,w)=(w,u)=(u,v,w)$（此處：$(u,v)$表$u,v$的最大公因數）

證明：設$(u,v)=d_1$, $(v,w)=d_2$　$\because$　$u^2+v^2=w^2$

$\Rightarrow$　$d_1^2 \mid u^2$ 且 $d_1^2 \mid v^2 \Rightarrow d_1^2 \mid w^2$

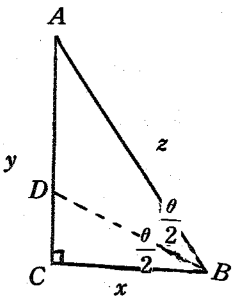
設$(d_1,w)=h$ 得 $d_1=hd_2$, $w=hw_1$ 且 $(d_2,w_1)=1$

$\Rightarrow h^2d_2^2 \mid h^2w_1^2 \Rightarrow d_2^2 \mid w_1^2$ 但 $(d_2, w_1) = 1$ 故 $d_2 = 1$ 即 $h = d_1$，$w = d_1w_1$

$\Rightarrow \because d_1 \mid w \Rightarrow d_1 \mid d_2$ 同理 $d_2 \mid d_1$ 故得 $d_1 = d_2$ 即 $(u, v) = (v, w)$

同理可證 $(v, w) = (w, u)$ 故 $(u, v) = (v, w) = (w, u) = (u, v, w)$。

定理2：承定理1存在 $m, n, K \in N$ $(m > n)$ 且 $m^2 - n^2$，$2mn$，$m^2 + n^2$ 兩兩互質，同時 $(m, n) = 1$ 使得 $u = (m^2 - n^2)K$，$v = 2mnK$，$w = (m^2 + n^2)K$ 且 m, n 爲一偶數一奇數。



圖一 $\angle ABC = \theta = 2\angle DBC$

證明：設 $(u, v, w) = K$，$x = \dfrac{u}{K}$，$y = \dfrac{v}{K}$，$z = \dfrac{w}{K}$

則 x, y, z 兩兩互質，且 x, y, z 亦構成直角三角形三邊長。

1° $\dfrac{x}{\cos\theta} = z$，$\dfrac{y}{\sin\theta} = z$（由圖一）

2° $\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1 = \dfrac{2}{\sec^2\dfrac{\theta}{2}} - 1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$（令 $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$）

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2 \cdot \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} \cdot \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

由 1°,2° 可知 $x : y : z = 1 - t^2 : 2t : 1 + t^2$

3° $\because \overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{DC}$ 得 $\overline{CD} = \dfrac{xy}{x+z}$ 即 $t = \dfrac{\overline{CD}}{BC} = \dfrac{y}{x+z}$

故 $0 < t < 1$ 且 $t \in Q$，令 $t = \dfrac{n}{m}$（$m > n$ 且 $(m, n) = 1$）

則 $x : y : z = 1 - (\dfrac{n}{m})^2 : 2 \cdot \dfrac{n}{m} : 1 + (\dfrac{n}{m})^2 = m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2$

若 m, n 爲二奇數，則 $m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2$ 不爲最簡比。

故 m, n 必爲一偶數一奇數時 $m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2$ 才是最簡比。

（因 $(m, n) = 1$，$\therefore m, n$ 不可能爲二偶數，另 $(m, n) = 1$ 且 m, n 爲一偶數一奇數時則 $m^2 - n^2$，$2mn$，$m^2 + n^2$ 兩兩互質的性質可利用反證法證得，這留給讀者證明）。

由1°,2°,3°知當$(m,n)=1$且m,n爲一偶數一奇數時，

得$x=m^2-n^2$，$y=2mn$，$z=m^2+n^2$（因x,y,z兩兩互質）

故$u=(m^2-n^2)K$，$v=2mnK$，$w=(m^2+n^2)K$。

定理3：若直角三角形三邊長爲整數，則兩股長至少有一爲3或4的倍數，三邊長至少有一爲5的倍數，即三邊積爲60的倍數。

說明：這是前言中所提的題目；在證明之前我們介紹一個符號；設m是正整數，a和b是整數。若a與b被m除所得的餘數相同，則我們稱a與b對模m同餘，記做$a\equiv b\pmod{m}$。因此$m\mid a-b$。例如$8\equiv 3\pmod{5}$，$58\equiv 14\pmod{11}$。再來我們介紹同餘的一些性質：

(1) 若$a\equiv b\pmod{m}$，$c\equiv d\pmod{m}$則$a\pm c\equiv b\pm d\pmod{m}$

(2) 若$a\equiv b\pmod{m}$，$c\equiv d\pmod{m}$則$ac\equiv bd\pmod{m}$

(3) 若$a\equiv b\pmod{m}$則$\forall\, n\in N$，$a^n\equiv b^n\pmod{m}$

證明：由模的意義即可證得。

由(1)，(2)，(3)可知同餘亦具加、減、乘、次方的運算功能，與相等關係頗爲類似，今以此爲工具進行定理3的證明。

證明：由定理2知$u=(m^2-n^2)K$，$v=2mnK$，$w=(m^2+n^2)K$（u,v,w爲三邊長）

1° 因任何整數被3除的餘數有0，1，2三種

(i) 若$m\equiv n\pmod{3}$則 $m^2\equiv n^2\pmod{3}$即$3\mid u$

(ii) 若$m\equiv 0\pmod{3}$或$n\equiv 0\pmod{3}$則$3\mid v$

(iii) ①若$m\equiv 1\pmod{3}$，$n\equiv 2\pmod{3}$則$m^2-n^2\equiv 1^2-2^2\equiv 0\pmod{3}$即$3\mid u$

② $m\equiv 2\pmod{3}$，$n\equiv 1\pmod{3}$同理可證$3\mid u$

故知兩股中有一爲3的倍數。

2° 仿1°欲證兩股中有一爲4的倍數可分成

(i) $m\equiv n\pmod{4}$則$4\mid u$

(ii) $m\equiv 0\pmod{4}$或$n\equiv 0\pmod{4}$則$4\mid v$

(iii) ① $m\equiv 1\pmod{4} < \begin{array}{l} n\equiv 2\pmod{4}\Rightarrow 4\mid v \\ n\equiv 3\pmod{4}\Rightarrow 4\mid u \end{array}$

② $m\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4) < \begin{matrix} n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)\Rightarrow 4\mid v \\ n\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)\Rightarrow 4\mid v \end{matrix}$

③ $m\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4) < \begin{matrix} n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)\Rightarrow 4\mid u \\ n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)\Rightarrow 4\mid v \end{matrix}$

3° 另 u,v,w 中至少有一爲5的倍數就留給讀者試試看。

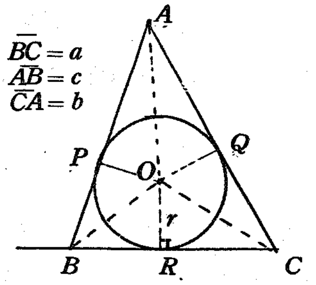
由 $1^\circ,2^\circ,3^\circ$ 可知 xyz 必爲 $[3,4,5]=60$ 的倍數。

定理4：若一個直角三角形三邊長都是整數，則它的內切圓及傍切圓半徑都是整數。

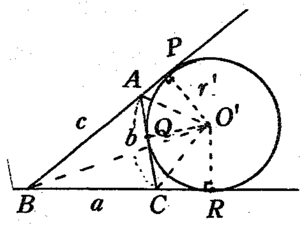
證明：1° （圖二）圓 O 爲 $\triangle ABC$ 的內切圓，r 爲半徑

則 $a\triangle ABC = a\triangle AOB + a\triangle AOC + a\triangle BOC$

$\therefore\quad a\triangle ABC=\dfrac{r}{2}(a+b+c)$ 得 $r=\dfrac{2a\triangle ABC}{a+b+c}$



圖二



圖三

2° （圖三）圓 O' 爲 $\triangle ABC$ 中 $\angle B$ 所對的傍切圓半徑爲 r'

則 $a\triangle ABC = a\triangle ABO' + a\triangle BCO' - a\triangle ACO' = \dfrac{r'}{2}(c+a-b)$

得 $r'=\dfrac{2\,a\triangle ABC}{c+a-b}$

同理可得 $\angle A$ 所對傍切圓的半徑爲 $\dfrac{2\,a\triangle ABC}{b+c-a}$

$\angle C$ 所對傍切圓的半徑爲 $\dfrac{2\,a\triangle ABC}{a+b-c}$

3° 若 $\triangle ABC$ 爲直角三角形且 $\angle C$ 爲直角，令 $a=(m^2-n^2)K$，$b=2mnK$，$c=(m^2+n^2)K$ 其中 $(m,n)=1$ 且 $m>n$，$K\in N$（利用定理2）

$$\text{此時內切圓半徑 } r=\frac{2a\triangle ABC}{a+b+c}=\frac{ab}{a+b+c}$$

$$=\frac{(m^2-n^2)K\cdot 2mnK}{K(m^2-n^2+2mn+m^2+n^2)}=(m-n)nK\in N$$

$$\angle B\text{ 所對傍切圓半徑}=\frac{2a\triangle ABC}{c+a-b}=\frac{(m^2-n^2)K\cdot 2mnK}{K(m^2+n^2+m^2-n^2-2mn)}$$

$$=(m+n)nK\in N$$

$\angle A$ 所對傍切圓半徑 $=m(m-n)K\in N$

$\angle C$ 所對傍切圓半徑 $=m(m+n)K\in N$

三、應　用

若我們做個逆向思考：一直角三角形三邊長皆爲整數，且知道其內切圓半徑之值，則此種直角三角形會有幾種？其中三邊長兩兩互質的又有多少種？我們先從一個例子來了解：

例：內切圓半徑爲 18 時？

解：1° 先處理兩兩互質的情形即 $K=1$ 時：（ $r=(m-n)nK$ ）

由定理 4 知 $(m-n)n=18$，因 $m-n$ 爲奇數（m，n 一偶數一奇數）且 $(m,n)=1$。故 $(m-n,n)=1$，因此可得數對 $(m-n,n)=(1,18),(9,2)$ 兩組，即當 $r=18$ 時任兩邊互質的直角三角形有 2 種，其三邊長分別爲 $(37,684,685),(117,44,125)$。

2° 另外一般情形：$\because (m-n)nK=2\times 3^2$，利用乘法原理，2 不能配給 $m-n$（$m-n$ 爲奇數），且 $(m-n,n)=1$ 故 3 不能同時配給 $m-n$ 與 n，故 2 有 2 種配法，配給 n 或 K。

3 的配法如下：

	K	n	$m-n$
	3^0	3^2	
	3^1	3^1	
	3^2	3^0	
	3^0		3^2
同一種	3^1		3^1
	3^2		3^0

故配法有 $2\times 3-1=5$ 種

由乘法原理可知分解法共有 $2\times5=10$ 種，我們做實驗獲得證實，列表如下：

K	n	$m-n$	m	$K(m^2-n^2)$	$2Kmn$	$K(m^2+n^2)$
				三邊長		斜邊
1	2	9	11	117	44	125
1	18	1	19	37	684	685
2	1	9	10	198	40	202
2	9	1	10	38	360	362
3	2	3	5	63	60	87
3	6	1	7	39	252	255
6	3	1	4	42	144	150
6	1	3	4	90	48	102
9	2	1	3	45	108	117
18	1	1	2	54	72	90

上表中，三角形的內切圓半徑均爲 18，且不同的 (K, n, m) 產生不同的直角三角形。

將上表再回顧前述的定理，一一檢驗你會發現規律之美。

一般化：若 $r=2^a p_1^{a_1} p_2^{a_2}\cdots p_l^{a_l}$ 其中 $p_1, p_2\cdots, p_l$ 是相異的奇質數，則例中的答案又如何呢？（ $a\geqslant0$ ， a_1 ， $a_2\cdots a\in N$ ）

解：1° 先處理兩兩互質的情形：（ $K=1$ ）

$(m-n)n=2^a p_1^{a_1} p_2^{a_2}\cdots p_l^{a_l}$ （ $m-n$ 與 n 互質）

2 只能配給 n 只有 1 種方法（ $m-n$ 爲奇數）

p_1 只能集中配給 $m-n$，或 n 有 2 種配法

⋮ ⋮

p_l……………………………………有 2 種配法

故可知三邊長兩兩互質且內切圓半徑爲 r 的直角三角形共有 2^l 種。

2° 再處理一般的情形：

$(m-n)nK=2^a p_1^{a_1} p_2^{a_2}\cdots\cdots p_l^{a_l}$（ $m-n$ 與 n 互質且 $m-n$ 爲奇數）

2 只能配給 n，K 有（ $a+1$ ）種配法。

p_1 不能同時配給 $m-n$ 與 n（因 $m-n$ 與 n 互質）

	K	n	$m-n$
	p_1^0	$p_1^{a_0}$	
	p_1^1	$p_1^{a_1-1}$	
	$\vdots$		
	$p_1^{a_1}$	p_1^0	
重複	p_1^0		$p_1^{a_1}$
	$\vdots$		$\vdots$
	$p_1^{a_1}$		p_1^0

故 p_1 的配法有 $2(a_1+1)-1=2a_1+1$ 種

同理 p_2 的配法有 $2a_2+1$ 種………

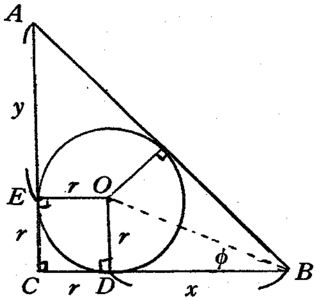
$\vdots$

依乘法原理可知分解法共有

$(a+1)(2a_1+1)(2a_2+1)\cdots(2a_l+1)$

種。

故可知三邊長皆為整數且內切圓半徑為 r 的直角三角形共有 $(a+1)\prod_{i=1}^{l}(2a_i+1)$ 種。



圖四

另解：見圖四：D、E 為切點，O 為圓心

$\angle OBD=\phi$ 因 $\phi<\dfrac{\pi}{4}$ $\therefore x>r$ 同理 $y>r$

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$

$(x+y)^2=(x+r)^2+(y+r)^2$

$\Rightarrow xy-rx-ry+r^2=2r^2$

$\Rightarrow (x-r)(y-r)=2r^2\ (x,y,r\in N)$

$\Rightarrow (x-r)(y-r)=2\cdot(2^a p_1^{a_1} p_2^{a_2}\cdots p_l^{a_l})^2=2^{2a+1}p_1^{2a_1}\cdots p_l^{2a_l}=A$

從 A 的正因數個數得 (x,y) 有 $(2a+1+1)(2a_1+1)(2a_2+1)\cdots(2a_l+1)$ 組解

但因 x,y 互換不改變三角形的形狀，故直角三角形共有 $\dfrac{(2a+2)}{2}\prod_{i=1}^{l}(2a_i+1)$ 種 #

例題：三邊長為整數的直角三角形的內切圓半徑為 90，且三邊長任兩邊均不互質的直角三角形有幾種？

解： $90=2\times3^2\times5$

1° 三邊長兩兩互質的有 2^2 種

2° 全有 $(1+1)(2\times2+1)(2\times1+1)=2\times5\times3=30$ 種

由 1°, 2° 可知任兩邊均不互質的有 $30-4=26$ 種 #

附註：（常見三邊長為整數的直角三角形，摘自數論淺談 p.134）

$(m, n) = 1$，而 $2 \leqslant m \leqslant 15$：

$y = 2mn$，$x = m^2 - n^2$，$z = m^2 + n^2$

m	n	y	x	z	m	n	y	x	z	m	n	y	x	z
2	1	4	3	5	9	8	144	17	145	13	12	312	25	313
3	2	12	5	13		4	72	65	97		10	260	69	269
4	3	24	7	25		2	36	77	85		8	208	105	233
	1	8	15	17	10	9	180	19	181		6	156	133	205
5	4	40	9	41		7	140	51	149		4	104	153	185
	2	20	21	29		3	60	91	109		2	52	165	173
6	5	60	11	61		1	20	99	101	14	13	364	27	365
	1	12	35	37	11	10	220	21	221		11	308	75	317
7	6	84	13	85		8	176	57	185		9	252	115	277
	4	56	33	65		6	132	85	157		5	140	171	221
	2	28	45	53		4	88	105	137		3	84	187	205
8	7	112	15	113		2	44	117	125		1	28	195	197
	5	80	39	89	12	11	264	23	265	15	14	420	29	421
	3	48	55	73		7	168	95	193		8	240	161	289
	1	16	63	65		5	120	119	169		4	120	209	241
						1	24	143	145		2	60	221	229

四、參考資料

1. 趙文敏：（1985.3），數論淺談。協進圖書公司。
2. 民國63年大學聯考自然組試題。
3. 高中基礎數學第四冊（1991），國立編譯館。

★