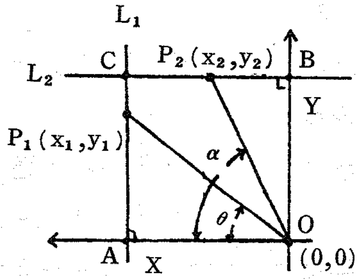
簡易三角函數器—概略估計三角函數數值的簡便方式

何家瑜
台北市立松山家商

三角函數對中學生而言，是一個全新的觀念，中等以下的學生避之唯恐不及，中等以上的學生對三角函數也常怕怕，定義雖然背在腦海中，但總少了一份感覺。簡易三角函數器可用來大略估算三角函數的數值，給使用的人印象深刻，對三角函數的學習有莫大的助益。本文爲敍述簡易三角函數器之製作過程及使用方法。以下說明皆以水平爲X軸，垂直爲Y軸，X軸與Y軸相交於O點，並以O點爲原點（0，0）。

正切（ tan ）：（參閱圖(a)）

直線L_1平行Y軸並與X軸相交於A點，直線L_2平行X軸並與Y軸相交於B點，直線L_1與L_2相交於C點，點$P_1(x_1,y_1)$在直線L_1上，直線OP_1與X軸的夾角爲θ，由正切的定義知$\tan\theta = y_1/x_1$，當點在直線L_1上時，x_1爲一常數，可令其爲1，表示一個單位長，則$\tan\theta = y_1$，$\tan\theta$即爲點P_1與A點的距離。



圖(a)

點$P_2(x_2,y_2)$在直線L_2上，直線OP_2與X軸的夾角爲α，由正切的定義知$\tan\alpha = y_2/x_2$，當點在直線L_2上時，y_2爲一常數，可令其爲1，表示一個單位長，則$\tan\alpha = 1/x_2$，$\tan\alpha$即爲點P_2與B點距離的倒數。

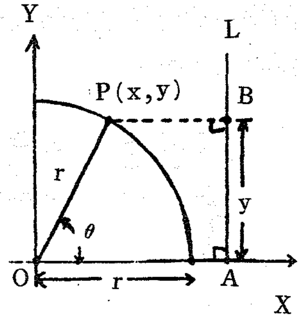
在直線L_1上，以x_1爲一個單位長，A爲起點（＝0），做一等刻度標示，表示與A點的距離，在直線L_2上，以y_2爲一個單位長，B爲起點（＝0），做一等刻度標示，表示與B點的距離，以O爲圓心，適當長爲半徑，在直線L_1，L_2與X，Y軸中做一圓弧，圓弧上仿量角器方式標示角度，則圓弧上的點，其與X軸的角度即可輕易讀出，而其相對應角度的正切值可由此點與O點作一直線，此直線與直線L_1或與直線L_2相交之點其上所標示的刻度而可得知，與L_1的交點其上的刻度即爲其相對應角度的正切值，與L_2的交點其上刻度的倒數即爲其相對應角度的正切值。若四邊形ACBO爲正方形，

$y_2 = x_1$，則L_1與L_2的單位刻度就會一樣。

＊以下說明中將L_1和L_2統稱正切數軸。

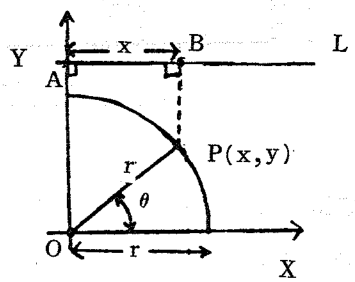
正弦（ sin ）：（參閱圖(b)）

直線L平行Y軸並與X軸相交於A點。以O點爲圓心，r爲半徑，作一圓弧如圖(b)所示。點P在圓弧上，其座標爲（x,y），與X軸的夾角爲θ，則由正弦的定義知 $\sin\theta = y/r$，點P在圓弧上時，r爲常數，可令其爲1，表示一個單位長，則$\sin\theta = y$，$\sin\theta$即爲P點與X軸的距離。過P點作一垂直L的直線，與L相交於點B，則$\sin\theta$也即爲B點與X軸的距離。



圖(b)

在直線L上，以r爲一個單位長，A爲起點（＝0），做一等刻度標示，表示與A點的距離，圓弧上仿量角器方式標示角度，則圓弧上的點，其與X軸的角度即可輕易讀出，而其相對應角度的正弦值可由此點作一垂直L的直線而與L相交之點其上所標示的刻度而可得知。



圖(c)

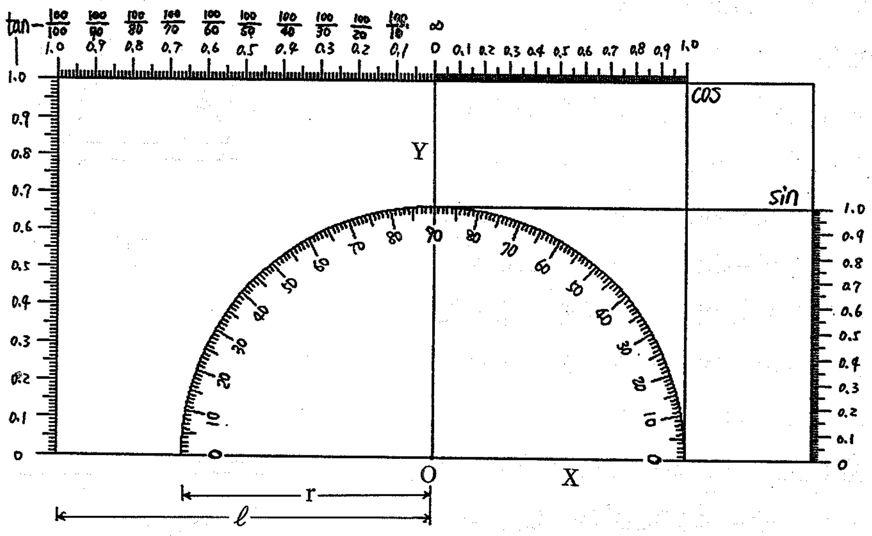
餘弦（ cos ）：（參閱圖(c)）

直線L平行X軸並與Y軸相交於A點，以O點爲圓心，r爲半徑，作一圓弧如圖(c)所示。點P在圓弧上，其座標爲（x,y），與X軸的夾角爲θ，則由餘弦的定義知 $\cos\theta = x/r$，點P在圓弧上時，r爲常數，可令其爲1，表示一個單位長，則 $\cos\theta = x$，$\cos\theta$即爲P點與Y軸的距離。過P點作一垂直L的直線，與L相交於點B，則$\cos\theta$也即爲B點與Y軸的距離。

在直線L上，以r爲一個單位長，A爲起點（＝0），做一等刻度標示，表示與A點的距離，圓弧上仿量角器方式標示角度，則圓弧上的點，其與X軸的角度即可輕易讀出，而其相對應角度的餘弦值可由此點作一垂直L的直線而與L相交之點其上所標示的刻度而可得知。

將以上合在一起，角度的量取可以O點爲圓心，畫一量角器來方便判讀(**)（正弦

與餘弦的單位長度取為量角器圓的半徑 r ，正切的單位長度取為大於 r 的任意長度 ℓ)，可製成如圖一的簡易三角函數器。以下說明皆以通過O點的水平線為X軸，通過O點垂直X軸的線為Y軸。



圖一

使用方法如下：

正切（ tan ）：

拿一直尺使其一端要通過在量角器的圓心，另一端要能超過正切函數的數值刻度，將此直尺移到所要量的正切角度上，則此直尺與正切函數數值刻度的交點，即為此角度之正切函數值。

正弦（ sin ）：

拿一直尺保持與Y軸垂直，上下移動此直尺到所要量的角度上（直尺與量角器圓弧上的交點），此時直尺與正弦函數數值刻度上的交點即為此角度的正弦函數值。

餘弦（ cos ）：

拿一直尺保持與X軸垂直，左右移動此直尺到所要量的角度上（直尺與量角器圓弧上的交點），此時直尺與餘弦函數數值刻度上的交點即為此角度的餘弦函數值。

其他三角函數：

餘切（ cot ）、餘割（ csc ）及正割（ sec ）分別為正切（ tan ）、正弦（ sin ）及餘弦（ cos ）的倒數，因此要求餘切（ cot ），餘割（ csc ）及正割（ sec ）值的方法與求正切（ tan ）、正弦（ sin ）及餘弦（ cos ）相同，只是要將所得數值求其倒數，

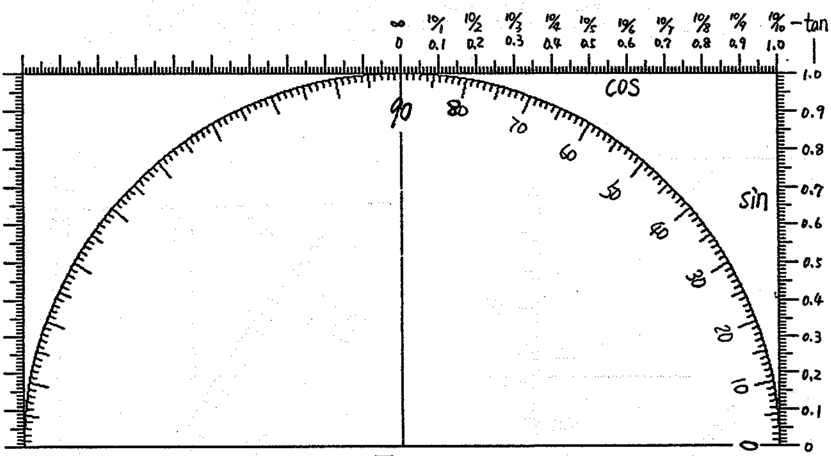
如 csc 45° $=\sqrt{2}=1.414$，而由簡易三角函數器可量得 sin 45° 介於 0.70 與 0.71 之間，所以餘割（ csc ）45° 介於 100/70 與 100/71（即 1.43 與 1.41 ）之間。

反三角函數：

先將直尺的一端移動到所要量的三角函數數值刻度上，要量正切（ tan ）時，直尺另一端要通過量角器的圓心，量正弦（ sin ）時，直尺保持與Y軸垂直，量餘弦（cos）時，直尺保持與X軸垂直，此時直尺與量角器的交點，即爲此三角函數數值所對應的角度。

單位長度的一致（圖二）

圖一的簡易三角函數器正切的單位長度與正弦、餘弦不同，因正弦、餘弦的一個單位長度爲量角器上面圓的半徑，而正切的一個單位長度則爲量角器圓心與正切數軸的距離，若兩者單位長度取成相同，都爲圓的半徑，則單位刻度可合用，結果如圖二所示。



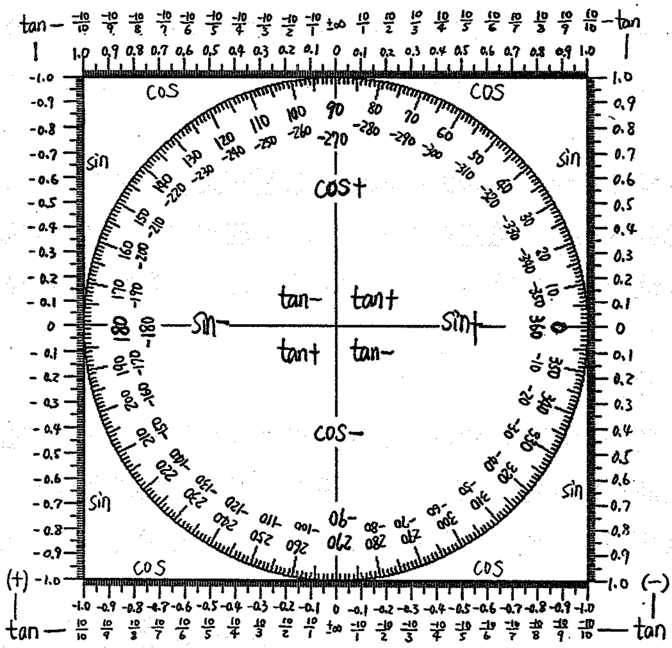
圖二

廣義三角函數（圖三）

以上所談是狹義三角函數，度數限定在 0°～90° 之間，若將其擴展到 0° ～ 360° 或負的度數，使用方法也完全相同，差別只在數值正負的標示，請參考圖三，其實就是一般常用的四個象限的觀念。由圖三即可深刻體驗到廣義三角函數在各個象限的正負情形。

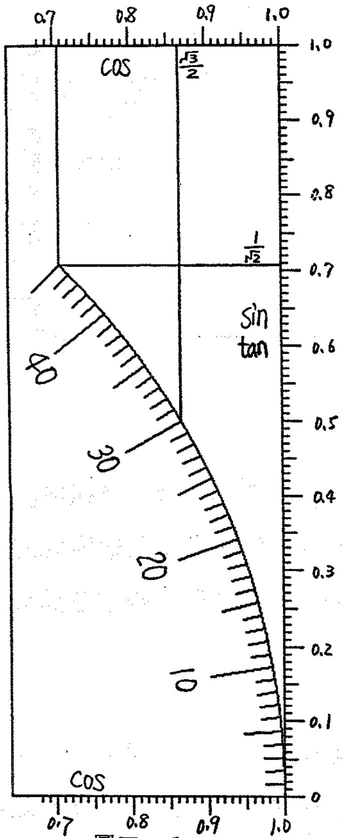
45° 放大圖（圖四）

本簡易三角函數器是由人實際去量取，難免會有量測上的誤差，若想減小量測上的誤差，可將全圖或部份圖等比例適度放大，因度數及三角函數數值刻度都是等刻度的畫



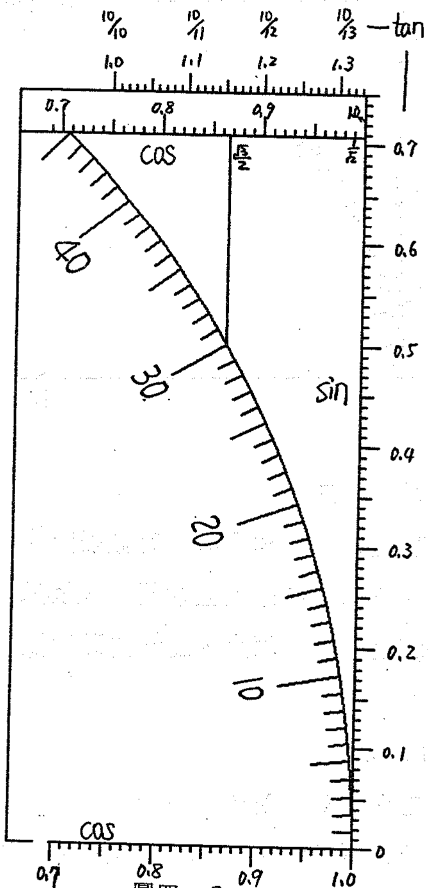
tan
cos
sin
cos+
cos−
sin−
sin+
tan−
tan+
(+)
(−)

圖三



cos
sin
tan
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$

圖四 - 1



tan
cos
sin
$\frac{\sqrt{3}}{2}$

圖四 - 2

法，製做上甚為簡單，如此在判視時即可較精確。而事實上三角函數只要有 $0^\circ \sim 45^\circ$，即可涵蓋所有的情況，因此若只畫 $0^\circ \sim 45^\circ$，可製成如圖四。

在圖四 -1 中，正弦和餘弦的量取方法與以上所提完全相同，而正切的量取方法原要一端通過量角器的圓心，但量角器的圓心並不在圖上，實際量取相當困難，變通的方法是將量角器上的角度刻劃指向圓心（一般量角器上也都如此）且要有相當長度，如此只要將直尺邊緣與量角器上的角度刻劃密合（如此就與通過圓心同義），而求此直尺邊緣與數值刻度的交點即可。

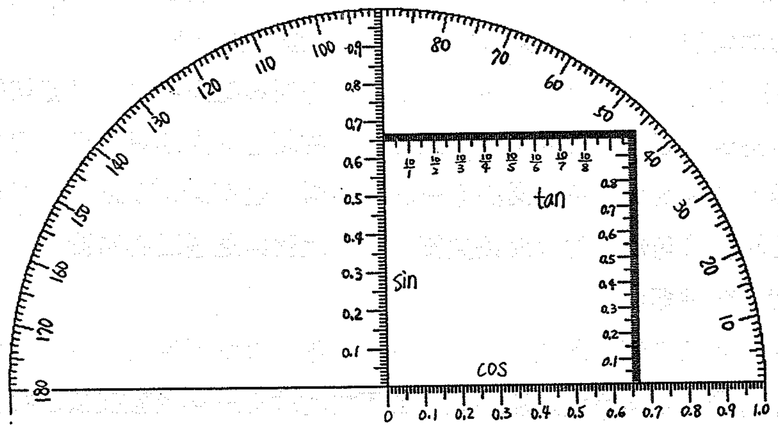
在圖四 -1 中為了顧及所有三角函數在數值軸上單位長度的一致，所以在如此大的數值框內，量角器中的圓最大只能如此。若不拘泥所有三角函數在數值軸上單位長度的一致性，可將量角器中的圓放大而繪製成圖四 - 2。

在圖四 - 2 中使用方法與圖四 - 1 相同，但要注意正切值大於 0.75（約為 $\tan 37^\circ$ 時）後，其單位長度有所不同，參考上面在圖(a)中正切函數的說明，其一個單位長度是正切數軸與 X 或 Y 軸的距離；而在圖四 - 2 中右邊的數軸與 Y 軸的距離為量角器圓的半徑，所以正切與正弦的單位長度相同，為量角器上圓的半徑，但正切值大於 0.75（正切角度約大於 37°）時，要看上面水平的正切數軸，而此數軸與 X 軸的距離為此數軸的一個單位長，圖四 - 2 中此值小於此圓的半徑，所以圖中上面水平的正切數軸其單位長度較小。

而在標示上方水平正切數值刻度時，由於本圖角度只量測到 45°，因此只需標示到 1 即足夠（$\tan 45^\circ = 1$），大於 1 的部份可省略。但何處是 1 呢？即與 Y 軸距離為一個單位長度之處，而一個單位長度就是上面水平的正切數軸與 X 軸的距離。由此向右繪製等刻度，表示與 Y 軸的距離，而其倒數即為其相對應角度的正切值。正切數軸右上角那一點，由右方數軸讀過來，約為 0.75，其倒數為 1.33 也正就是由上面水平的正切數軸看來的數值。

多功能量角器（圖五）

簡易三角函數器可與量角器結合成多功能量角器如圖五，除了可大略估計三角函數數值，瞭解三角函數的定義外，還可保留原有量角器的度量角度及作圖上的功能。在此圖中，將所有三角函數數值刻度都標示在量角器內，正弦和餘弦所取的單位長度仍為圓的半徑，但刻度標示在 Y 及 X 軸上。正切的單位長度則取略小於本圖中的 $\sin 45^\circ$，以不和量角器角度的刻度重疊以方便判讀。使用方法及原理與上面各類型的簡易三角函數器完全一樣。



圖五

其他分析

簡易三角函數器除了可求三角函數、反三角函數，及認識三角函數的定義外，對於三角函數的特性亦可分析如下：

正切（ tan ）分析：正切在幾何意義上爲一條線的斜率，用簡易三角函數器在實際量測正切函數值時會有相當深刻的印象。

正弦（ sin ）在小角度時有相當的線性關係，由簡易三角函數器可看出正弦(sin)在小角度時所增加的度數約略正比於其相對所增加的正弦值。在小於 $3°$ 時由圖一至四來看兩者還幾乎完全重疊，舉例來看，$0° \sim 3°$ 的正弦值若以通過 $\sin 0°$ 及 $\sin 3°$ 的直線來代替，最大誤差發生在 $1.5°$ ，$\sin 1.5° = 0.026176948$ ，代替直線所得爲 $(\sin 0° + \sin 3°)/2 = 0.026167978$ ，最大誤差也只不過是 $0.000008969/0.026176948 = 0.0342663\%$，角度更小，線性關係更好。事實上，當 θ 趨於零時，$\sin\theta/\theta = 1$（註一）。

註一：（參考：與中學生談中國數學史上的幾大成就　華氏編著　九章出版社）

參考圖(d)，角度 θ 是以弳度（ radiant ）爲單位。

取半徑是 1 的圓，取角 θ ，$0 < \theta < \pi/2$ ，△OAB的面積大於扇形OAC的面積，而扇形OAC的面積大於△OAC的面積。但△OAB的面積是 $\tan\theta/2$ ，扇形OAC的面積是 $\theta/2$ ，△OAC的面積是 $\sin\theta/2$ 。

$$\tan\theta/2 > \theta/2 > \sin\theta/2$$

$$1/\sin\theta > 1/\theta > 1/\tan\theta \text{ 或 } 1 > \sin\theta/\theta > \cos\theta$$

當 θ 趨於零時，$\cos\theta$ 趨近於 1 ，$\sin\theta/\theta$ 也趨近於 1 。

（下轉第66頁）