開方杯— 可用來計算開方的一組杯子

*何家瑜 **李雅君
*台北市立松山家商
** 台北市立大同高級中學

據說（希臘神話）大約在公元前四百多年，雅典城流行了可怕的傷寒病，人們為了消除這個災禍，便向太陽神阿波羅求助。太陽神指示說：必須把我殿前神壇上香案的體積擴大一倍，才能使瘟疫不再流行。他的香案是立方體形的，看來這個條件並不苛刻，於是人們馬上作了一個新的香案，使它的每條稜的長度是原有立方體各稜的長度的一倍，然而，這是不合太陽神規定的。因此，疫勢依舊非常猖獗。雅典人再去祈禱太陽神，方才知道這個新香案的體積並不等於舊香案的兩倍。那究竟應該怎樣做？這可把當時的人難倒了，甚至當時負有盛譽的學者柏拉圖也覺得茫無頭緒，認為要解決它，是一件非常困難的事(1)。

雖然這是一個神話，然而，立方倍積問題由於有了這樣的神話傳說，就變得很有名，成為幾何三大作圖不可能問題（另兩個問題是：化圓為方的問題，三等分任意角），即這些問題用圓規和直尺是不能解的。為了簡便起見，我們假設已知立方體的邊長是1單位，則此立方體體積便是 $1\times1\times1=1$。根據題意，求作的立方體體積應為 $2\times1=2$，所以邊長應該是2的立方根。而要從單位長度的線段用有限次的加，減，乘，除和開平方來作出線段2的立方根，是不可能的，所以立方倍積問題是不能用直尺與圓規解決的。其嚴謹的證明請參考《一百個著名初等數學問題歷史和解答》(2)。

使用幾何作圖法若不限定只能用圓規和直尺，希臘數學家梅納奇馬斯（Menaech-mus，公元前約375～325年）的解法基於求其參數為 k 和 $2k$ 的兩條拋物線的交點：

$$x^2=ky \quad (1) \quad 及 \quad y^2=2kx \quad (2)$$

由於 $x^4=k^2y^2=2k^3x$，所以該交點的橫座標 x 能滿足 $x^3=2k^3$ 的條件，k 為已知，交點的橫座標 x 可量得，x/k 即為2的立方根。

至於開方法，則在至今一千八百多年前，中國一本古老的數學著作《九章算術》(3)第四章"少廣"中已有開方的方法，歸納起來說，開平方是依據平方數學式

$$
\begin{aligned}
N &= (a+b+c+d+\cdots\cdots)^2 \\
&= a^2 \\
&\quad + (2a+b)b \\
&\quad + \{2(a+b)+c\}c \\
&\quad + \{2(a+b+c)+d\}d \\
&\quad + \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

的計算層次，反轉它的次序來逆推計算的。在高中理科數學下冊1-3-甲傳統開方法中所提的，就是利用此一原理。而此原理也可用來開立方，只是就非常繁複了：開立方是依據求立方數學式

$$
\begin{aligned}
N &= (a+b+c+d+\cdots\cdots)^3 \\
&= a^3 \\
&\quad + (3a^2+3ab+b^2)b \\
&\quad + \{[(3a^2+3ab+b^2)+(3ab+2b^2)] \\
&\quad + [3(a+b)c+c^2]\}c \\
&\quad + \{[3(a+b)^2+3(a+b)c] \\
&\quad + [3(a+b)c+2c^2]+[3(a+b+c)d+d^2]\}d \\
&\quad + \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

的計算層次，反轉它的次序來逆推計算的。

本文要提出的，不是上述一般紙上作業法，乃是利用大自然的方法—— 利用體積不變的原理，設計一個體積與其高度成正比的量杯，另一個體積與高度的立方成正比的立方根杯，將定量液體由量杯倒至立方根杯，則立方根杯液體之高度的立方就與量杯液體之高度成正比，即立方根杯液體之高度就與量杯液體之高度的立方根成正比，此就達成將量杯液體之高度開立方根的效果。此種方式簡單方便，深具教育性及趣味性，以下就詳述之。

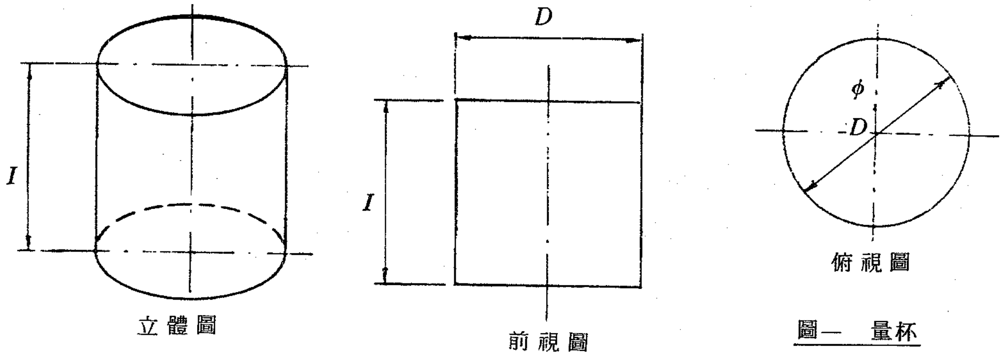
設計一量杯其體積與其高度成正比，即在任何高度時其水平截面積都必須相同，如圓柱體（參閱圖一）。立方根杯的體積與高度的立方成正比，如倒立圓錐體（參閱圖二)。其證明如下：

高度爲 h 時，此液體體積爲 $r\times r\times\pi\times h/3$ ………(3)

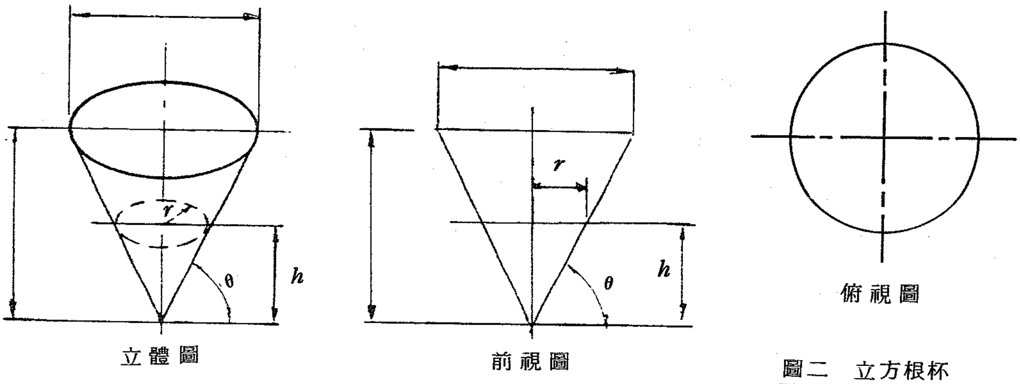
其中 r 爲高度爲 h 時之截面圓的半徑，θ 爲倒立圓錐體外緣與水平線的夾角，則 $r=h\times\cot\theta$，代回(3)式得 $h\times h\times h\times c_3$………(4)

其中 $c_3 = \cot\theta \times \cot\theta \times \pi/3$

在同一立方根杯下，c_3 是一常數，故得證圖二倒立圓錐體其所盛液體之體積與其高度立方成正比。



圖一　量杯



圖二　立方根杯

將定量液體由量杯倒至立方根杯，則立方根杯液體之高度的立方，就與量杯液體之高度成正比，即立方根杯液體之高度，與量杯液體之高度的立方根成正比，此就達成將量杯液體之高度開立方根的效果。證明如下：

假設量杯截面積為 w，倒入定量液體後高度為 h_1

則此定量液體體積為 $w \times h_1$

將此定量液體倒入立方根杯後高度為 h_3，則此定量液體體積由(4)式得　$h_3 \times h_3 \times h_3 \times c_3$

依據體積不變的原理知　$w \times h_1 = h_3 \times h_3 \times h_3 \times c_3$

又 w 與 c_3 皆為常數，故得證 h_1 正比於 h_3 的立方。

要用圓規和直尺求平方根就相當簡單，畫個直角三角形，利用兩股平方和等於斜邊平方就成了；在高中理科數學下册 1 - 3 中也提出許多計算的方法；而利用以上類似的原理，也能設計可開平方根的杯子。

平方根杯的體積與高度平方成正比，如倒立三角體（參閱圖三）。證明如下：

高度爲 h 時此液體體積爲 $a \times b \times \sin\theta \times t/2$ ……(5)（t 爲倒立三角體的厚度），其中 $h = a \times \sin\alpha = b \times \sin(180-\alpha-\theta)$，

得 $a = h/\sin\alpha$，$b = h/\sin(180-\alpha-\theta)$

代回 (5)式得 $h \times h \times c_2$ ………(6)

其中 $c_2 = \dfrac{\sin\theta \times t}{\sin\alpha \times \sin(180-\alpha-\theta) \times 2}$

在同一平方根杯下，c_2 是一常數，故得證圖三倒立三角體其所盛液體體積與高度平方成正比。

將定量液體由量杯倒至平方根杯，則平方根杯液體之高度的平方就與量杯液體之高度成正比，即平方根杯液體之高度就與量杯液體之高度的平方根成正比，此就達成將量杯液體之高度開平方根的效果。證明如下：

假設量杯截面積爲 w，倒入定量液體後高度爲 h_1

則此定量液體體積爲 $w \times h_1$

將此定量液體倒入平方根杯後高度爲 h_2，則此定量

液體體積由(6)式得 $h_2 \times h_2 \times c_2$

依據體積不變的原理知 $w \times h_1 = h_2 \times h_2 \times c_2$

又 w 與 c_2 皆爲常數，故得證 h_1 正比於 h_2 的平方

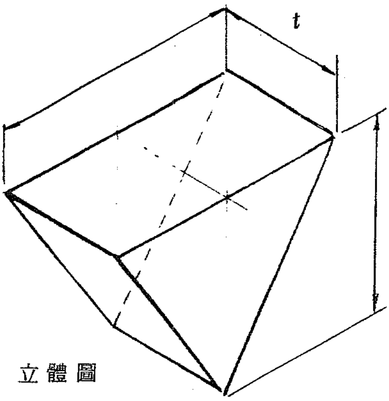
由以上的說明只知道一定量的液體在量杯的高度分別與同量液體在立方根杯高度的立方及平方根杯高度的平方成正比，實際用來計算立方根及平方根時需先標示刻度，以方便觀察。根據以上的證明，量杯與開方杯的單位長度未必相同，單位長度的刻畫方式可用一定量的體積倒入量杯中，其高度就爲量杯的一個單位長，再將此定量液體倒入開方杯中，其高度也即爲開方杯的一個單位長度，這是運用1的任何開方均仍爲1本身的原理，來決定各類杯的單位長度。若經適當設計，可使 $w = c_2$（有無限多組解），如此 $h_1 = h_2 \times h_2$，量杯與平方根杯之單位長度就一致。也可使 $c_3 = w$（有無限多組解），如此 $h_1 = h_3 \times h_3 \times h_3$，量杯與立方根杯之單位長度就一致。

而在高度測量方式上，爲方便理論上之探討，以上所有說明中的高度皆是指從杯底底點之垂直高度，實際觀察時，垂直高度有時並不好觀察，而事實上沿著杯壁來計算高度也是可以的，因垂直高度與沿著杯壁的長度成正比。

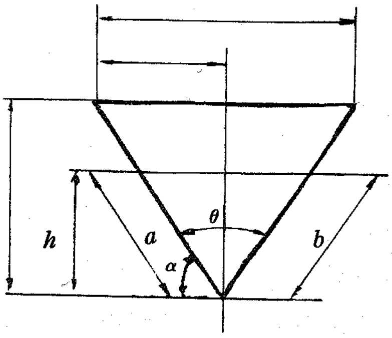
量杯，平方根杯與立方根杯之間的不同組合，有其他運算的結果，若將平方根杯之

定量液體例入量杯中，就爲平方的運算；若將立方根杯之定量液體倒入量杯中，就爲立方的運算；若將平方根杯之定量液體倒入立方杯中，就爲2/3次方的運算；若將立方根杯之定量液體倒入平方根杯中，就爲 3/2 次方的運算；證明方式與上類似，在此就不一一列舉。

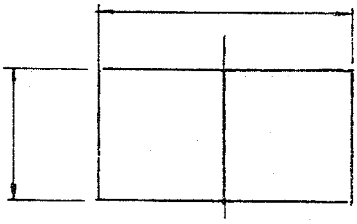
對某數開平方根或開立方根，可用以上大自然的方法來計算，深具教育性及趣味性，在無其他現代化工具時，亦爲一簡單方便的計算工具。回到原題，所以要求新香案的體積等於舊香案的兩倍，可先依上述方法作量杯及開立方根杯各一，並標上適當刻度，將適量的液體倒入量杯中使其高度等於舊香案邊長的兩倍，將量杯中的液體倒入立方根杯中，其高度所相對應的標示刻度的長度即爲新香案的邊長，若量杯及開方杯的單位刻度一致則此高度即爲新香案的邊長。



立體圖



前視圖



俯視圖

圖三 平方根杯

參考資料

1. 趣味數學常識，雪山圖書有限公司
2. 〔德〕海因里希-德里著，一百個著名初等數學問題歷史和解答，凡異出版社
3. 華氏編著，與中學生談中國數學史上的幾大成就，九章出版社
4. 劉健飛、張正齊著，數學五千年，曉園出版社
5. 李儼著，中國古代數學簡史，九章出版社

★