

# 1995年第26屆國際物理奧林匹亞競賽 試題參考答案(II)

林明瑞  
國立臺灣師範大學物理系

## 實驗試題第一題：

### (a) 計算終端速度

當圓柱體在液體中以終端速度下落時，其所受的重力、黏滯力、和浮力等三力的合力為零，即：

$$V\rho g - 6\pi k\eta r^m v_T - V\rho'g = 0$$

式中  $V = 2\pi r^3$  為圓柱體的體積（半徑為  $r$ ，長度為  $2r$ ）。解之得終端速度為：

$$v_T = Cr^{3-m}(\rho - \rho') \quad (4-1)$$

式中  $C = \frac{g}{3k\eta}$ ，為一常數。

### (b) 指數 $m$ 的測定

在(4-1)式中，若保持  $\rho$  不變（即選用同一種金屬的圓柱體），測量終端速度  $v_T$  和圓柱體半徑  $r$  之間的關係，即可定出指數  $m$ 。實驗方式如下：

在裝滿甘油的 1000 ml 量筒中，選定兩個適當的刻度線（譬如 300 ml 和 100 ml 的刻度線），將一個金屬圓柱體使自液面開始靜止落下，測量它通過兩個刻度線所需的時間。注意在此測量前，必須設法證實圓柱體在落至指定的區域時，已達到終端速度。

換用不同半徑的同種金屬圓柱體，重複上述的實驗。

設  $D$  為兩刻度線之間的距離， $t$  為所測出的通過時間，則(4-1)式可寫成下式：

$$\frac{D}{t} = Cr^{3-m}(\rho - \rho') \quad (4-2)$$

$$\Rightarrow \log D - \log t = (3-m)\log r + \log C(\rho - \rho')$$

$$\Rightarrow \log t = -(3-m)\log r - \log C(\rho - \rho')/D \quad (4-3)$$

從上式中可看出  $\log t$  和  $\log r$  的關係曲線為一直線，其斜率等於  $-(3-m)$ 。

參考數據：

鋁圓柱體半徑 r (mm)	通過300ml和100ml刻度線的時間 t (s)						平均值 $\bar{t}$ (s)
4	6.22	6.06	6.16	6.13	6.13	6.22	6.15±0.02
5	4.06	4.34	4.09	4.12	4.25	4.13	4.17±0.04
8	1.80	1.82	1.78	1.84	1.82	1.81	1.81±0.01
10	1.44	1.56	1.44	1.37	1.44	1.41	1.44±0.03

右圖中直線的斜率為

$$= - \left( \frac{66.0 \pm 0.1}{75.5 \pm 0.1} \right) / \left( \frac{41.0 \pm 0.1}{78.5 \pm 0.1} \right)$$

$$= -1.67 \pm 0.01$$

【註】因為圖中  $x$  軸和  $y$  軸上兩相同刻度間的長度不一致，所以必須取比例值。

$$\Rightarrow m = 3 - (1.67 \pm 0.01)$$

$$= 1.33 \pm 0.01$$

(c) 甘油密度  $\rho'$  的測定

利用 (4-2) 式，改寫成下式：

$$\frac{1}{t} = \frac{Cr^{3-m}}{D} (\rho - \rho') \quad (4-4)$$

若圓柱體的半徑  $r$  保持不變，則式中  $1/t$  對  $\rho$  成一直線關係，此直線在  $\rho$  軸上的截距即為甘油密度  $\rho'$ 。實驗方式如(b)所述，但選用同樣半徑的不同種金屬圓柱體做為試樣。

參考數據：

試樣	圓柱體密度 $\rho(\text{kg}/\text{m}^3)$	通過300ml和100ml刻度線的時間 t (s)						平均值 $\bar{t}$ (s)	$\frac{1}{\bar{t}}(s^{-1})$
鋁	$2.70 \times 10^3$	6.03	6.09	6.09	6.16	6.06	6.06	6.08±0.02	0.165±0.001
鈦	$4.54 \times 10^3$	3.00	2.91	2.97	2.91	2.84	2.75	2.90±0.04	0.345±0.005
不銹鋼	$7.87 \times 10^3$	1.31	1.32	1.38	1.44	1.31	1.34	1.35±0.02	0.741±0.011
銅	$8.96 \times 10^3$	1.25	1.25	1.28	1.25	1.22	1.22	1.25±0.01	0.800±0.006

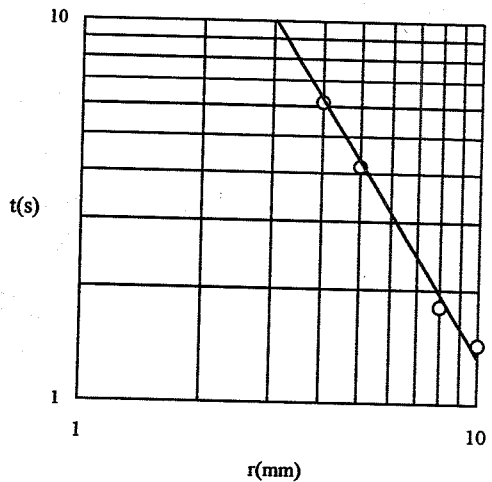


圖4-1

由右圖中讀得直線在  $\rho$  軸上的截距，即甘油的密度  $\rho' = (1.1 \pm 0.2) \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ 。

評分標準：(本題總計 20 分)

- (a) 1分 寫出  $V\rho g - 6\pi k\eta r^m v_T - V\rho' g = 0$   
 1分 寫出  $v_T = Cr^{3-m}(\rho - \rho')$

(a)合計 2分

- (b) 2分 合理的「時間」數據點的分布，標準差在  $0.1 \text{ s}$  以內。  
 2分 有確證圓柱體已達到終端速度：使用目視方法者，得 1分；提出實驗數據以證實者，得 2分。

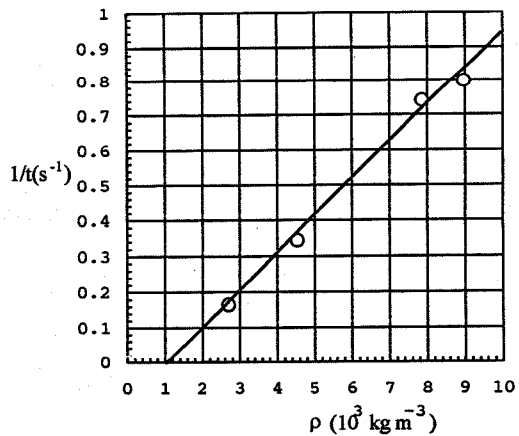


圖4-2

- 2分 將實驗數據標記在雙對數座標紙上。  
 1分 在對數—對數圖上，所有的數據點合理地分布在一條直線的鄰近。  
 1分 從數據圖中計算出  $(3 - m)$ 。  
 1分 得出  $m \approx 1.33$ 。  
 1分 估計  $m$  的標準誤差。

(b)合計 10分

- (c) 1分 合理的「時間」數據點的分布，標準差在  $0.1 \text{ s}$  以內。  
 1分 有確證圓柱體已達到終端速度。  
 2分 畫出  $1/t$  對  $\rho$  的關係曲線圖。  
 1分 上圖中的數據點合理地分布在一條直線的鄰近。  
 1分 從圖中計算出甘油的密度。  
 1分 得出合理的甘油密度值  $\rho'$  (正確值為  $1.260 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ )  
 1分 估計  $\rho'$  的標準誤差。

(c)合計 8分

實驗試題第二題：

第一部分：

實驗裝置圖如圖 5-1 所示。

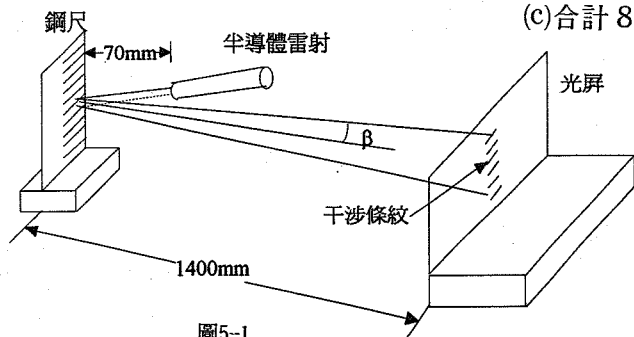


圖5-1

【註一】鋼尺至光屏之間的距離宜盡量取大，以增加干涉圖樣的幅度。

【註二】由於鋼尺的刻痕（相當於光柵的狹縫）為水平，所以干涉條紋沿垂直方向展開。

設  $y$  為某一級干涉條紋偏離中央亮紋的垂直距離 (mm)，則  $\beta = \frac{y}{1400}$

參考數據：量取中央亮紋（即零級條紋， $N = 0$ ）上下第 10 級條紋 ( $N = \pm 10$ ) 之間的距離，得如下表：

次 數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$2y$ (mm)	39.0	38.5	39.5	41.0	37.5	38.0	39.0	38.0	37.0	37.5
$y$ (mm)	19.5	19.3	19.8	20.5	18.8	19.0	19.5	19.0	18.5	18.8

平均值  $\bar{y}$  (mm) =  $19.3 \pm 0.2$

鋼尺上兩刻痕之間的寬度  $h$  (mm) =  $0.50 \pm 0.02$

利用干涉關係式  $N\lambda = \pm h \sin \beta \approx \pm h\beta$  (5-1)

$$\Rightarrow \lambda = \frac{(0.50 \pm 0.02)}{10} \cdot \frac{(19.3 \pm 0.2)}{1400} = (0.689 \pm 0.028) \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$= (690 \pm 30) \text{ nm}$$

第二部分：

(i) 由於人類的眼睛對亮度的感覺呈現對數性的關係，約如下式：

$$\left(\frac{I'}{I_0}\right)_{eye} \approx 1 + \log \left(\frac{I'}{I_0}\right) \quad (5-2)$$

式中  $\left(\frac{I'}{I_0}\right)$  為真實的亮度比值，而  $\left(\frac{I'}{I_0}\right)_{eye}$  則為人類眼睛的感覺亮度比值，列表

比較如下：

真實亮度比 $\left(\frac{I'}{I_0}\right)$	0.10	0.25	0.50	0.75	1.0	2.0	5.0	7.5	10
感覺亮度比 $\left(\frac{I'}{I_0}\right)_{eye}$	0.00	0.40	0.70	0.88	1.0	1.3	1.7	1.9	2.0

本實驗先將雷射光穿過一 50% 的濾光片（【註】實驗器材中僅有二片 50% 和一片 25% 的濾光片。），照射在光屏上，觀察其亮度，然後將透明塑膠盒取代濾光片，插入其間，比較亮度的差異。結果後者看起來較前者為亮。因此可判斷光透明塑膠

盒的透射係數應在 50 % 以上。拿開塑膠盒，使雷射光直接照射在光屏上，觀察亮度，估計前後兩者（即光經塑膠盒時及不經時的狀況）感覺亮度的比值。利用上表可對照出真實的亮度比值。

透射係數在 75 % 至 85 % 之間的任何估計值，皆為可接受的答案。

(i) 光對空氣和塑膠界面的透射係數為

$$T = 1 - R = 1 - \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 = 1 - \left( \frac{1 - 1.59}{1 + 1.59} \right)^2 = 0.948$$

由於塑膠盒共有四個界面，若忽略界面間多重反射的損失，則總透射係數為

$$T_{total} = (0.948)^4 = 0.808 \text{ 或 } 80.8\%$$

第三部分：

若將水加入塑膠盒內，則第二和第三界面變為水 / 塑膠的界面，其透射係數為

$$T_2 = T_3 = 1 - \left( \frac{1.33 - 1.59}{1.33 + 1.59} \right)^2 = 0.992$$

$$\Rightarrow T_{water} = T_1 T_2 T_3 T_4 = 0.948 \times 0.992 \times 0.992 \times 0.948 = 0.885 \quad (5-3)$$

第四部分：

(i) 實驗裝置如下圖：

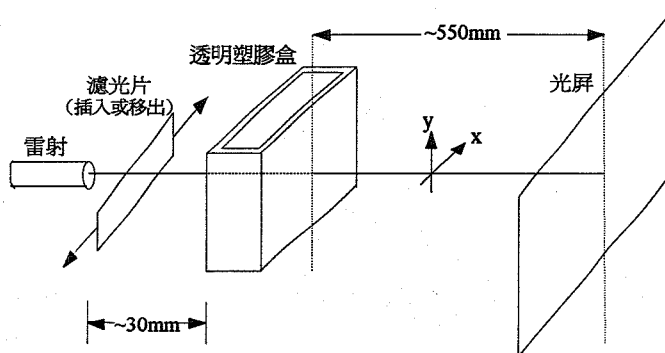


圖5-2

將水加入透明塑膠盒，依照第二部分所述的方法，估計光的透射係數約為 85 %。參考如右的俯視圖，以測量雷射光被散射後的角度：

入射光束的直徑  $D = 2.00 \text{ mm}$ 。

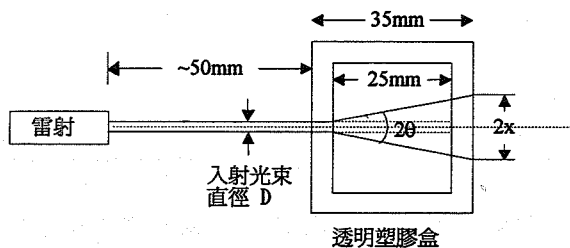


圖5-3

(i) 將 0.5 ml 的牛奶滴入裝有 50 ml 水的塑膠盒後，測得的數據如下：

$$\text{牛奶濃度} = \frac{0.5}{50} = 0.01 = 1\%$$

$$2x = 2.2 \text{ mm} \Rightarrow 2\theta = \frac{2x - D}{30} = \frac{2.2 - 2.0}{30} = 0.0067 = 0.38^\circ \quad (5-4)$$

光的透射係數  $T_{total} \approx 70\%$  (依照第二部分(i)的實驗方法)

若塑膠盒內僅裝有純水，則由 (5-3) 得光對水的透射係數為  $T_{water} \approx 0.885$ 。因

$$\text{此光對牛奶本身的透射係數為：} T_{milk} = \frac{T_{total}}{T_{water}} \approx \frac{0.70}{0.885} = 0.79$$

【註】有兩種方法用於測量光的散射角：(1)量出光在塑膠盒射出面的光圈直徑，再利用 (5-4) 式以計算出角度。此法適用於小散射角；(2)由上往下俯視盒內的液體，直接用量角器量出光的散射角。此法適用於大散射角。但是用以上方法測量散射角時，必須注意：即使在有光散射的情況下，入射光束仍有部分能量直直穿透塑膠盒，其亮度要比周圍的散射區域強得多。因此在測量散射角時，必須特別留意。

(ii) 參考數據如下：

加入的牛奶體積(ml)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
牛奶百分濃度(%)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2x	2.0	2.2	6.2	9.4	12	(使用量角器)			
$2\theta$ (°)	0	0.4	8	14	19	28	36	41	48
$T_{milk}$	1.0	0.79	0.45	0.22	0.15	0.12	0.08	0.06	0.05

(v) 利用上表的數據，得圖 5-4。由圖中可看出光散射角  $\phi$  ( $=2\theta$ ) 和牛奶百分濃度  $C$  之間大致成線性關係。

$$\phi \approx 6C \quad (5-5)$$

(v) 已知

$$I = I_0 e^{-\mu z} = T_{milk} \cdot I_0$$

$$\Rightarrow \ln T_{milk} = -\mu z \quad (5-6)$$

式中  $\mu$  為常數  $\times$  牛奶百分濃度， $z$  為光在液體

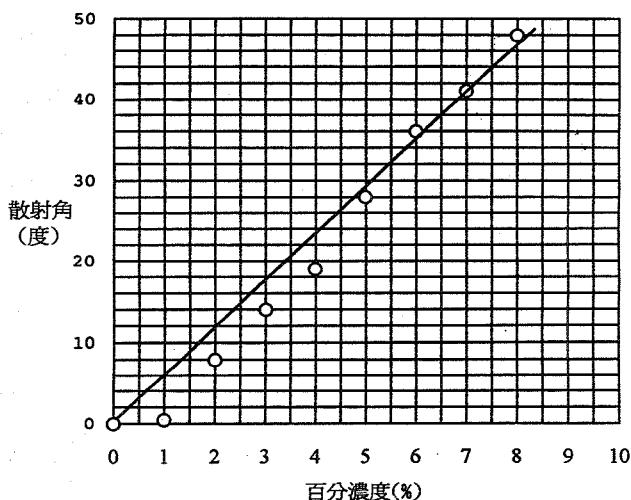


圖5-4

內行經的距離。  $\Rightarrow \ln T_{milk} = -kC$  (5-7)

式中  $k$  爲一常數。利用前表之數據，計算得：

牛奶百分濃度(%)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$T_{milk}$	1.0	0.79	0.45	0.22	0.15	0.12	0.08	0.06	0.05
$\ln T_{milk}$	0	-0.24	-0.80	-1.51	-1.90	-2.12	-2.53	-2.81	-3.00

由右圖中之直線斜率及 (5-7)

式，可得： $k = 0.4$

由 (5-6) 和 (5-7) 兩式，得：

$$0.4 C = \mu z$$

在本實驗中，光在液體中的行程

$z = 25\text{mm}$ ，以之代入上式，

得： $0.4 C = 25 \mu \Rightarrow \mu = 0.016C$

對 10% 濃度的牛奶而言，其衰減係數爲

$$\mu = 0.016 \times 10 = 0.16\text{mm}^{-1}$$

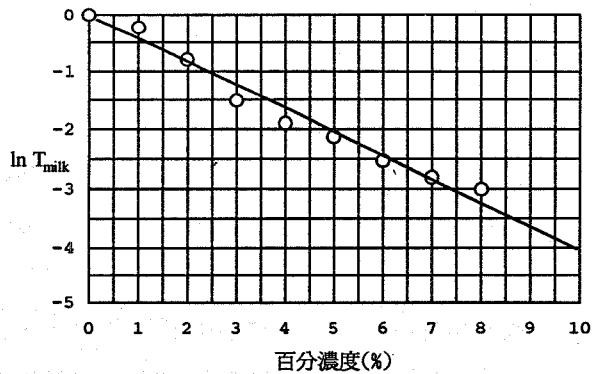


圖5-5

評分標準：(本題總計 20 分)

第一部分：

- 1分 畫出實驗裝置圖並加合適的標記。
- 1分 說出裝置圖中宜取的最佳幾何關係，譬如雷射光源應靠近鋼尺等。
- 1分 多次測量數據，求取平均值。
- 1分 數據列表。
- 1分 指出誤差來源，譬如因鋼尺上刻度不勻，以致所得的干涉圖樣不理想。
- 1分 計算誤差。
- 2分 所得波長在公認值的  $\pm 10\%$  之內，即在 612 nm 至 748 nm 之間，得 2 分；在  $\pm 20\%$  之內者，即在 544 nm 至 816 nm 之間者，得 1 分；誤差在  $\pm 20\%$  以外者，不給分。

第一部分合計 8 分

第二部分：

- 1分 有證據顯示經由實驗估計透射係數，而不是經由計算反推得出，所得數值在

70%至90%之間。

1分 正確計算出透射係數(有效數字不應超過三位)。

第二部分合計2分

第三部分：

1分 計算 $T_{total} = 88.5\%$ (有效數字不應超過三位)，並顯示有實驗測量數據。

第三部分合計1分

第四部分

1分 畫出實驗裝置圖，包括側視圖和下視圖。

1分 能見識出散射光和直線透射光的差異。

1分 寫出 $T_{milk} = \frac{T_{total}}{T_{water}}$ 的關係式。

1分 列出 $T_{milk}$ 的實驗數據表，所得數值與參考值相差在 $\pm 40\%$ 以內者。

1分 作圖求出光散射角和牛奶濃度之間的關係。

1分 應用作圖技巧，利用外插法，求出對應於10%牛奶濃度的透射係數。

2分 求出衰減係數 $\mu$ 。若所得數值與參考值相差在 $\pm 40\%$ 以內者，得2分；在 $\pm 60\%$ 以內者，得1分；其它，不給分。

1分 合理的誤差估計。

第四部分合計9分

★

## 更正啟事

本刊第184期底封面之英文目錄第6、7兩行，應為“*The Better Understanding of Earth Science, You are More Interested in Earth Science..... Fang-Nan Hwang*”。謹此更正並向作者與讀者深致歉意。

編輯室