1995年第36屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析（I）

CANADA 1995

中華民國參加第36屆國際數學奧林匹亞競賽代表團
*陳昭地 **林哲雄 ***于 靖 +柳 賢 *朱亮儒 *洪有情
*國立臺灣師範大學數學系
** 國立清華大學數學系
*** 中央研究院數學研究所
+國立高雄師範大學理學院

前　言

國際數學奧林匹亞競賽（IMO）試題源自主辦國以外，各參與國在接受邀請繳交試題期限內提交0～6道題（陳昭地，民81年、民82年），再由主辦國試題委員會研究選出24～30題預選題，分屬代數、幾何、組合數學、數論、數列等不同領域，經由各國領隊組成之主試委員會修訂票選出6道題，依主題內容及易中難層次安排每天3道題的二份試題。今年的試題，是先由主辦國加拿大之試題委員會從各國所提供的三百多道試題中研究選出28道，含代數、幾何、數論和組合數學、數列等不同難度的試題及參考解答。再由主試委員會，經過二天六次會議研究票選出一道代數題，二道幾何題，二道數論和組合數學題，一道數列題。本文的目的在於針對今年七月我國代表團所翻譯成的中文版IMO 6道試題提供參考解答，評析解題重點，且就我國六位學生代表答題概況及本屆73個參與國412位學生代表得分統計加以比較評析，以供國內相關專家學者、數學教師等輔導數學資優生之研究應用參考。

一、第36屆國際數學奧林匹亞競賽試題

請參閱本刊第182期第55頁～56頁。

二、第36屆國際數學奧林匹亞競賽成績統計

根據主辦單位確認公佈之第36屆73個參與國共計412位競賽代表成績，參考前屆分析方式（陳昭地，民81年、民82年），列表如下，以供試題解答分析之參考。

表 1 第36屆IMO全部參與競試學生之成績統計表

總人數 412 人

項目＼題次	1	2	3	4	5	6	總 計
平均得分	5.06	1.71	3.13	4.58	3.41	1.07	18.95
得分率	0.72	0.24	0.45	0.65	0.49	0.15	0.45
標準差	2.78	2.93	2.74	2.66	3.21	2.13	11.69
變異係數	54%	172%	88%	58%	94%	199%	62%
難度指數	0.62	0.40	0.48	0.59	0.49	0.24	
鑑別指數	0.72	0.79	0.77	0.76	0.82	0.45	

表 2 金牌、銀牌、銅牌及未得獎牌分組成績統計表

表 2(a) 金牌獎(人數 30;成績≧37)

項目＼題次	1	2	3	4	5	6	總 計
平均得分	7.00	6.80	6.93	6.83	6.77	5.63	39.97
得分率	1.00	0.97	0.99	0.98	0.97	0.80	95%
標準差	0.00	0.92	0.37	0.75	0.97	2.06	2.22
變異係數	0%	14%	5%	11%	14%	37%	6%

表 2(b) 銀牌獎(人數 71;37 >成績≧29)

題次 / 項目	1	2	3	4	5	6	總 計
平均得分	6.76	4.99	5.68	6.75	6.07	2.21	32.45
得分率	0.97	0.71	0.81	0.96	0.87	0.32	77%
標準差	0.80	3.01	1.74	0.67	2.09	2.52	2.42
變異係數	12%	60%	31%	10%	34%	114%	7%

表 2(c) 銅牌獎(人數 100;29 >成績≧19)

題次 / 項目	1	2	3	4	5	6	總 計
平均得分	6.55	0.94	4.11	6.05	5.20	0.84	23.69
得分率	0.94	0.13	0.59	0.86	0.74	0.12	56%
標準差	1.24	2.29	2.41	1.47	2.80	1.74	3.09
變異係數	19%	243%	59%	24%	54%	208%	13%

表 2(d) 未得獎牌者(人數 211;成績<19)

題次 / 項目	1	2	3	4	5	6	總 計
平均得分	3.50	0.25	1.26	2.83	1.19	0.15	9.18
得分率	0.50	0.04	0.18	0.40	0.17	0.02	22%
標準差	2.92	1.22	1.66	2.48	2.11	0.69	5.38
變異係數	83%	494%	131%	88%	177%	470%	59%

表 3　1995年第36屆國際數學奧林匹亞競試中華民國學生代表得分及成績統計表

姓名 \ 題次	1	2	3	4	5	6	總　分	獎　牌
陳　和　麟	7	7	5	7	7	2	35	銀
舒　正　州	7	0	2	7	1	0	17	榮譽獎
蘇　柏　青	7	7	5	7	2	0	28	銅
邱　奕　智	7	7	7	6	7	0	34	銀
莊　智　仰	7	7	5	7	7	0	33	銀
卓　士　堯	7	2	6	7	7	0	29	銀
總　分	42	30	30	41	31	2	176	4銀1銅 1榮譽獎

表 4　1995年第36屆國際數學奧林匹亞競試各題得分成績人數統計表

得分 \ 題次	1	2	3	4	5	6
0	47	299	96	44	141	290
1	38	7	80	57	48	37
2	21	5	33	16	30	22
3	18	1	28	18	8	12
4	7	1	34	25	1	5
5	4	4	24	36	7	6
6	38	5	17	48	5	6
7	239	90	100	168	172	34
總　人　數	412	412	412	412	412	412

表 5　1995年第36屆IMO前十名國家成績統計表

名次	國家＼題次	1 總分	1 平均	2 總分	2 平均	3 總分	3 平均	4 總分	4 平均	5 總分	5 平均	6 總分	6 平均	總計 總分	總計 平均
1	中國大陸	42	7.00	42	7.00	40	6.67	36	6.00	42	7.00	34	5.67	236	39.33
2	羅馬尼亞	39	6.50	35	5.83	42	7.00	42	7.00	42	7.00	30	5.00	230	38.33
3	俄羅斯	42	7.00	42	7.00	42	7.00	42	7.00	42	7.00	17	2.83	227	37.83
4	越南	42	7.00	42	7.00	40	6.67	42	7.00	42	7.00	12	2.00	220	36.67
5	匈牙利	38	6.33	21	3.50	40	6.67	42	7.00	42	7.00	27	4.50	210	35.00
6	保加利亞	41	6.83	35	5.83	41	6.83	41	6.83	35	5.83	14	2.33	207	34.50
7	南韓	42	7.00	42	7.00	37	6.16	39	6.50	28	4.67	15	2.50	203	33.83
8	伊朗	42	7.00	30	5.00	32	5.33	38	6.33	42	7.00	18	3.00	202	33.67
9	日本	42	7.00	14	2.33	25	4.17	41	6.83	42	7.00	19	3.17	183	30.50
10	英國	42	7.00	25	4.17	30	5.00	31	5.17	35	5.83	17	2.83	180	30.00
平均（60人）		6.87		5.47		6.15		6.57		6.53		3.38		34.97	
總平均（412人）		5.06		1.71		3.13		4.58		3.41		1.07		18.95	

註 1. 從平均得分來看，無論從前十名國家 60 位代表（表 5 ）或全體參賽國家 412位代表（表 1 ），可排出本屆易到難的題序爲 1 、4 、5 、3 、2 、6 ，第 6 題難度最高，而第 1 道題最簡易。

2. 其餘排名第 11 ～ 20 的國家如下（我國排名第 12 名）。美國（ 178 分），中華民國（ 176 分），以色列（ 171 分），印度（ 165 分），德國（ 162 分），波蘭（ 161 分），捷克（ 154 分），南斯拉夫（ 153 分），加拿大（ 153 分），香港（ 151 分）。

三、試題詳解及評析

問題1（保加利亞）

〔解一〕（試題委員會公布的解法）

若$P=X$或Y，則很顯明本問題是對的。現假設$P\neq X$且$P\neq Y$。

因為$\overline{PB}\cdot\overline{PN}=\overline{PX}\cdot\overline{PY}=\overline{PC}\cdot\overline{PM}$，所以$M$、$N$、$C$、$B$四點共圓

若P在線段$\overline{XY}$上，則

$$\begin{aligned}\angle MAD+\angle MND&=\angle MAD+\angle MNB+\angle BND\\&=\angle MAD+\angle MCA+\angle AMC\\&=180^\circ\end{aligned}$$

若P不在線段$\overline{XY}$上，則

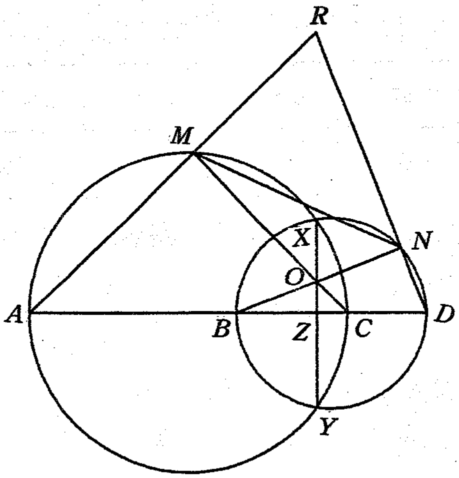
$$\begin{aligned}\angle MAD&=180^\circ-\angle AMC-\angle MCA\\&=180^\circ-\angle BND-\angle PNM\\&=\angle MND\end{aligned}$$

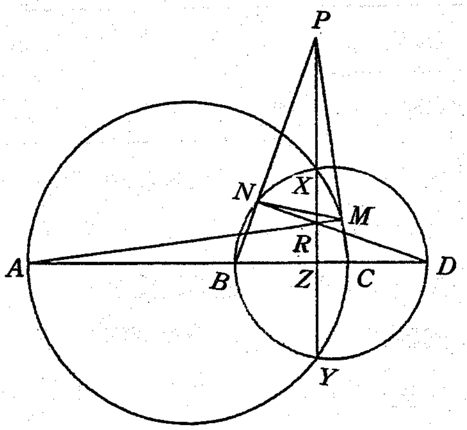
因此，只要P在直線XY上，A、D、N、M必四點共圓。

設直線AM和直線DN交於R，且設直線RX分別交兩圓於Y_1和Y_2。

則　$\overline{RX}\cdot\overline{RY_1}=\overline{RA}\cdot\overline{RM}=\overline{RD}\cdot\overline{RN}=\overline{RX}\cdot\overline{RY_2}$

$\therefore$　$Y_1=Y_2=Y$。　故R在XY上，得證。





〔解二〕（莊智仰同學的做法）

建立直角坐標系使得XY為y軸，$\overline{XY}$之中點為$(0,0)$，$\overline{XY}=2$

設以$\overline{AC}$為直徑的圓，其圓心O_1坐標為$(-a,0)$

而以$\overline{BD}$為直徑的圓，其圓心O_2坐標為$(b,0)$

則O_1的半徑 $r_1=\sqrt{a^2+1}$，且C點坐標爲（$\sqrt{a^2+1}-a$，0），

A點坐標爲（$-(a+\sqrt{a^2+1})$，0）

設P爲直線XY上任意點，其坐標爲（0，r）

考慮直角$\triangle AMC$。設$\angle MCA=\theta_1$，$\angle MAC=\theta_2$

$$\Rightarrow \tan\theta_2=\cot\theta_1=\frac{\sqrt{a^2+1}-a}{|r|}$$

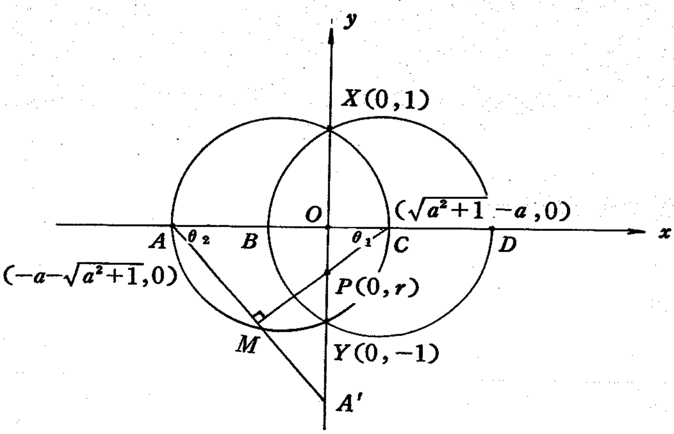
設直線AM交直線XY於A'

$$\text{則}\quad A'O=AO\ \tan\theta_2=\frac{(a+\sqrt{a^2+1})(\sqrt{a^2+1}-a)}{|r|}=\frac{1}{|r|}$$

同理，令直線BN交直線XY於B'，則 $\overline{B'O}=\dfrac{1}{|r|}$

又$\because$ A'，B'均在x軸的同側，故A'，B'重合於y軸

即 AM、BN、XY三線共點。



評析：

1. 本題爲保加利亞所設計，屬平面幾何的題目。主試委員會預估爲簡易題。考試結果有58％（239位）得滿分，爲6道題之冠，且30位金牌獎在這道題全都拿滿分，平均得分5.06，得分率0.72，是6道題中最簡單的一題。其鑑別指數0.72，鑑別度合理。

2. 解題重點：

主要用到四點共圓的條件。

(1) 利用圓弦性質，證明M、N、C、B四點共圓。

(2) 討論P點在線段$\overline{XY}$上及P點不在線段$\overline{XY}$上兩種情形，證明A、D、N、M四點共圓。

(3) 再根據圓弦性質，得證AM、DN及XY三線共點。

3. 討論：

(1) 這道題至少有二十種證法。用綜合幾何方法證明，必須考慮P點在線段$\overline{XY}$上和P點不在線段$\overline{XY}$上兩種情形。若只考慮一種情形，則最多只能拿到6分。若用解析幾何方法證明，也很容易，同時也可避開討論P點的位置關係，而得到滿分。

(2) 本題得到全隊滿分的國家共13國，我國也得到滿分42分。莊智仰和卓士堯兩位同學用解析幾何方法證明，其餘四位同學用綜合幾何方法，六位同學的證法都不一樣。

(3) 有些參賽學生只考慮P在線段$\overline{XY}$上的情形，而忽略P不在線段$\overline{XY}$上的情形。其實這兩種情形的證法完全一樣，所以只寫“同理可證”即可。蘇柏青和邱奕智兩位同學也沒有明顯的提到P不在線段$\overline{XY}$上的情形，圖形也只畫出一個。在經過與協調員協商後，認為他們的證法已可包含了兩種情形，而獲得滿分。

問題2（俄羅斯）

〔解一〕（試題委員會公布的解法）

令 $x=\dfrac{1}{a}$，$y=\dfrac{1}{b}$ 及 $z=\dfrac{1}{c}$，則 $xyz=1$ 且

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$$

用T表示上述的和，則有

$$(x+y+z)T=\frac{1}{2}((y+z)+(z+x)+(x+y))T$$

$$=\frac{1}{2}((\sqrt{y+z})^2+(\sqrt{z+x})^2+(\sqrt{x+y})^2)((\frac{x}{\sqrt{y+z}})^2+(\frac{y}{\sqrt{z+x}})^2+(\frac{z}{\sqrt{x+y}})^2)$$

由柯西不等式知

$$(x+y+z)T\geq\frac{1}{2}(x+y+z)^2$$

因此， $T \geq \dfrac{x+y+z}{2}$

再由算幾不等式知

$$T \geq \frac{x+y+z}{3} \cdot \frac{3}{2} \geq \sqrt[3]{xyz} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

上式等號成立的充要條件是 $x=y=z=1$，亦即 $a=b=c=1$。

〔解二〕（陳和麟同學的作法）

由柯西不等式，我們有

$$\left(\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\right)\cdot 2(bc+ca+ab)$$

$$=\left(\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\right)(a(b+c)+b(c+a)+c(a+b))$$

$$\geq \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=(bc+ca+ab)^2$$

故得

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{bc+ca+ab}{2}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{bc+ca+ab}{3} \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\frac{3}{2}$$

上式的最後一個不等式爲算幾不等式。

評析：

1. 本題爲俄羅斯設計提供，爲一代數題，考試結果，在412位參賽者中有90位（21％）得滿分，卻有299位（72％）得0分，全體平均值1.71分，得分率0.24，難度僅次於第6題，而鑑別率0.79僅次於第5題。前十名國家（60人）的平均數爲5.47分，我國6位選手平均數爲5.0分，顯然，還需要加強這類型題目的訓練，才能使我國排名在十名以內。
2. 解題評分重點：

(1) 能化成正確的等式（證明過程中使用柯西不等式之前的等式）且該式子確實有助於完成證明結果，可得2分。

(2) 能用柯西不等式導出 $T \geq \dfrac{x+y+z}{2}$，得3分（累積得5分）。

(3) 能用算幾不等式導出最後的不等式，得2分（累積得7分）。

(4) 不等式的等號成立之充要條件部分不計分。

3. 討論：

(1) 本題解題過程技能主要爲變數代換再配合柯西不等式及算幾不等式，此種不等式的題型是很適合我國學生作答，但考試結果祇有四位學生得滿分（7分），相當可惜。其中蘇柏青、邱奕智及莊智仰的解法與試委會公布的解法類似，適當地使用變數代換以簡化式子，而另一位學生陳和麟同學不經變數變換而直接配成柯西不等式的型式後再導出結果。

(2) 另兩位選手分別利用凸函數的性質及無法導出結果的柯西不等式而得到2分及0分，其中卓士堯以爲函數 $f(x,y)=\dfrac{x^3y^3}{x+y}$ 是凸函數（但沒有證明），事實上，經驗證後 f 不是凸函數，經協商後祇得2分。即使函數 f 是凸函數（但沒有證明），但由於不是很顯然可以判斷出來的情況下，依大會的評分標準，這種證明最多也祇能得5分。在平時訓練學生的時候，我們也一再要求可以不用微積分的技巧時，儘量不要用，否則在整個證明過程中就應更嚴密的證明每一細節。

(3) 韓國的6位選手都能把握分數，拿到本題滿分，這也是他們能擠入前十名的關鍵題。此外，大陸、俄羅斯、越南也都得到滿分。而去年冠軍美國隊的6位學生中祇有一名得滿分，其他五位選手未能得到分數，也使得美國隊排名掉到第十一名。

（未完待續）