1995年第26屆國際物理奧林匹亞競賽試題參考答案(Ⅰ)

林明瑞
國立臺灣師範大學物理系

理論試題第一題：

(a) 一個頻率爲 f 的光子，其等效慣性質量爲 $m=\dfrac{hf}{c^2}$

假設光子的重力質量即等於此慣性質量，則當光子自距星球中心爲 r 的位置，逃脫至無窮遠處時，將會損失一部分能量。由能量守恆定律知：

光子能量的變化（$hf_i - hf_f$）＝光子重力位能的變化

式中 f_i ＝光子的起始頻率，f_f ＝光子的最後頻率。

$$hf_i - hf_f = -[(-\frac{GMm_i}{r})-(-\frac{GMm_f}{\infty})] \text{ , } hf_f = hf_i - \frac{GMm_i}{r}$$

$$hf_f = hf_i - \frac{GM(\frac{hf_i}{c^2})}{r} \text{ , } hf_f = hf_i(1-\frac{GM}{rc^2}) \text{ , } \frac{f_f}{f_i}=1-\frac{GM}{rc^2}$$

$$\frac{f_f - f_i}{f_i} = -\frac{GM}{rc^2}$$

若 $\Delta f \ll f$，即光子能量的變化很小，則上式可寫爲：$\dfrac{\Delta f}{f}=\dfrac{f_f - f_i}{f_i}=-\dfrac{GM}{rc^2}$

負號代表頻率減小，波長變長，即所謂重力紅位移。

若光子自星球表面上（$r=R$）逃脫至無窮遠處，則 $\dfrac{\Delta f}{f}=-\dfrac{GM}{Rc^2}$

(b) 當一光子從 r_i 上升至 r_f 時，其能量的變化爲

$$hf_i - hf_f = -[(-\frac{GMm_i}{r_i})-(-\frac{GMm_f}{r_f})]$$

假設 $m_f \approx m_i = \dfrac{hf_i}{c^2}$，則上式可寫爲 $hf_i - hf_f \approx \dfrac{GM(hf_i)}{c^2}[\dfrac{1}{r_i}-\dfrac{1}{r_f}]$

$$\therefore \quad \frac{f_f}{f_i} \approx 1 - \frac{GM}{c^2}\left[\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right]$$

在本題中，R = 星球的半徑，d = 與星球表面之距離。

代入上式，得 $\dfrac{f_f}{f_i} \approx 1 - \dfrac{GM}{c^2}\left[\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R+d}\right]$

由於從星球表面射出的光子，其頻率因重力紅位移的效應而變小，因此爲了能使太空船測試室中的氦離子產生共振吸收，入射的光子頻率必須藉由都卜勒效應，從 f_f 回復至 f_i。

假設太空船中的氦離子所接收的光子頻率爲 f'，則由相對論都卜勒公式知：

$$\frac{f'}{f_f} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \approx 1 + \beta \qquad \because \quad \beta = \frac{v}{c} \ll 1$$

但爲能產生共振吸收，f' 必須等於 f_i。即 $\dfrac{f_i}{f_f} \approx 1 + \beta \Rightarrow \dfrac{f_f}{f_i} \approx 1 - \beta$

代入前式，得 $\beta \approx \dfrac{GM}{c^2}\left[\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R+d}\right] = \dfrac{GM}{c^2}\left[\dfrac{d}{(R+d)R}\right]$

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta} \approx \left(\frac{Rc^2}{GM}\right)\left[\frac{R}{d} + 1\right]$$

由上式知，以 $\dfrac{1}{\beta}$ 對 $\dfrac{1}{d}$ 作圖可得一直線，此直線的各項參數如下：

$$\text{斜率} = \left(\frac{Rc^2}{GM}\right) R = \alpha R \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

$$y\text{ 軸截距} = \left(\frac{Rc^2}{GM}\right) = \alpha \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (B)$$

$$x\text{ 軸截距} = -\frac{1}{R} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (C)$$

由(A)和(B)兩式可解出 R 和 M，(C)式可做爲核對之用。

利用題中所給的數據，可轉成下表，圖示如下：

$\frac{1}{\beta}$ (10^5)	0.2983	0.3050	0.3130	0.3250	0.3384
$\frac{1}{d}$ $(10^{-8} m^{-1})$	0.02571	0.05005	0.07508	0.111	0.150

由圖中讀出：

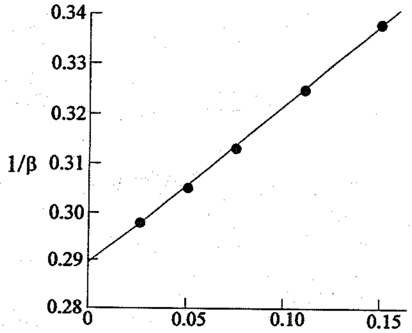
直線的斜率 $= 3.2\times10^{12}\ m$

直線在 y 軸上的截距 $= 0.29\times10^{5}$

$$\Rightarrow \frac{(A)}{(B)} = R = \frac{3.2\times10^{12}}{0.29\times10^{5}} = 1.1\times10^{8}\,m$$

以之代入(B)式，得

$$M = \frac{Rc^2}{G\alpha} = \frac{(1.1\times10^{8})\times(3.0\times10^{8})^2}{(6.7\times10^{-11})\times(0.29\times10^{5})} = 5.1\times10^{30}\ kg$$



(c)(i)

	發射光子前	發射光子後	

靜態質量	m_o	m_o'	o
動量	o	$\overrightarrow{p'}$	$\overrightarrow{p}$
能量	$m_o c^2$	$\sqrt{p'^2c^2+m_o'^2c^4}$	hf

光子的動量 $p = \dfrac{hf}{c}$

按動量守恆定律，$\overrightarrow{p'} + \overrightarrow{p} = 0$，即 $p' = p = \dfrac{hf}{c}$

由質量和能量的對等性知：

原子內能的變化＝原子靜態質量的變化，即 $\Delta E = (m_0 - m_0')\,c^2$

在實驗室座標系中，

發射光子前的原子系統的總能量 $E = m_0 c^2$

發射光子後的原子系統的總能量 $E' = \sqrt{p'^2c^2 + m_0'^2c^4} + hf$

根據能量守恆定律，$E = E'$，即：

$$m_0c^2 = \sqrt{(hf/c)^2c^2 + m_0'^2c^4} + hf\ ,\ (m_0c^2 - hf)^2 = (hf)^2 + m_0'^2c^4$$

$$(m_0c^2)^2 - 2\,hfm_0c^2 = m_0'^2c^4$$

$$hf\,(2m_0c^2) = (m_0^2 - m_0'^2)\,c^4 = (m_0 - m_0')\,c^2\,(m_0 + m_0')\,c^2$$

$$= \Delta E\,[\,2m_0 - (m_0 - m_0')\,]\,c^2 = \Delta E\,[\,2m_0c^2 - \Delta E\,]$$

$$\Rightarrow hf = \Delta E\left[\,1 - \frac{\Delta E}{2m_0c^2}\,\right]$$

(ii)若不計原子的反衝，則所發射的光子能量為 $hf_0 = \Delta E$。

設 $\Delta f = f - f_0 \quad \Rightarrow \dfrac{\Delta f}{f} = -\dfrac{\Delta E}{2m_0c^2}$

假定氦離子的能階躍遷是從 $n = 2$ 至 $n = 1$，則根據波耳的原子模型，

$$\Delta E = 13.6\times(2)^2\times(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}) = 40.8\ eV$$

已知 $m_0c^2 = 4\times 938\,MeV = 3.752\times 10^9\ eV$

因原子反衝而引起的光子頻率位移為 $\dfrac{\Delta f}{f} = -5.44\times 10^{-9}$

此值比起重力紅位移（$\dfrac{\Delta f}{f}\approx -10^{-5}$），要小很多，因之可忽略不計。

評分標準：（本題總計20分）

(a) 1分 $m = \dfrac{hf}{c^2}$。

2分 由能量守恆得出 $\dfrac{\Delta f}{f}\approx -\dfrac{GM}{Rc^2}$ 。

(a)合計3分

(b) 1分 $hf_i - hf_f = -\dfrac{GMm_f}{r_f} + \dfrac{GMm_i}{r_i}$。

2分 由 $m_f\approx m_i = \dfrac{hf_i}{c^2}$ 導至 $hf_i - hf_f \approx \dfrac{GM(hf_i)}{c^2}[\dfrac{1}{r_i}-\dfrac{1}{r_f}]$。

3分 由都卜勒效應（相對論或古典）$\dfrac{f_i}{f_f}\approx 1+\beta$ 導至 $\beta\approx\dfrac{GM}{c^2}[\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{R+d}]$。

2分 寫出 $\dfrac{1}{\beta}\approx(\dfrac{Rc^2}{GM})[\dfrac{R}{d}+1]$ 或其它可正確以作圖解出 R 和 M 的數學式。

3分 認出 $1/\beta$ 對 $1/d$ 的直線關係，並寫出正確的斜率和截距。

1分 解出 R 和 M 的合理數值（除非偏差太大，否則不扣分）。

(b)合計12分

【註】：若參賽學生以 β 對 d 作圖，從關係曲線上取兩點座標（β_1, d_1）和（β_2, d_2），利用下兩式計算 R 和 M：

$$R=\frac{d_1d_2(\beta_2-\beta_1)}{\beta_1d_2-\beta_2d_1}\ ,\ \beta_1=\frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+d_1}\right)\ ,$$

則(b)部分的得分最多爲10分(比應用前法之最高分少2分)。

(c)(i)

1分　光子能量 hf;光子動量 $\frac{hf}{c}$;原子內能變化 $\Delta E=(m_0-m_0')c^2$ 。

1分　寫出相對論性能量—動量關係式。

1分　寫出相對論性能量守恆式。

1分　得出光子頻率位移的確實解:$\frac{\Delta f}{f}=\Delta E\left(1-\frac{\Delta E}{2mc^2}\right)$

(c)之(i)合計4分

【註】:若以古典物理方法求解,則所得爲非確實解,(c)之(i)最多僅得3分。

(ii)

1分　$\frac{\Delta f}{f}=-5.44\times10^{-9}$

(c)之(ii)合計1分

理論試題第二題:

(a) 考慮在聲波傳播軌跡上的某一極小長度的路徑ds,可視做爲半徑爲R的一小段圓弧。(注意此半徑可爲任一實數值)假定聲波起先從聲源S處往上射出,如圖2-1所示。

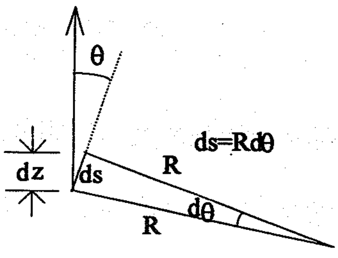


圖2-1

由司乃耳折射定律　$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta_0}=\frac{c}{c_0} \qquad (2\text{-}1)$$

得　$$\cos\theta\, d\theta=\frac{\sin\theta_0}{c_0}dc$$

當聲波往上傳播時,$c=c_0+bz \Rightarrow dc=bdz \Rightarrow \frac{\sin\theta_0}{c_0}bdz=\cos\theta\, d\theta$

因此　$$dz=\frac{c_0}{\sin\theta_0}\frac{1}{b}\cos\theta\, d\theta$$

由於ds極小，可當做爲一小線段，$dz = ds\ \cos\theta \Rightarrow ds = \dfrac{c_0}{\sin\theta_0}\dfrac{1}{b}d\theta$

$$\Rightarrow \frac{ds}{d\theta} = R = \frac{c_0}{\sin\theta_0}\frac{1}{b} \qquad (2\text{-}2)$$

由於(2-1)式適用於任一折射角θ，亦即可應用在聲波軌跡上的任一點，因此所導出的(2-2)式可適用於聲波軌跡上的任一小段弧長。式中的R僅爲聲波起始射出角θ_0的函數。如果θ_0一定，則R爲一常數，亦即聲波的軌跡爲一半徑爲R的圓弧，直至聲波進入$z<0$的區域。

(b) 在前題中已證明聲波往上傳播的軌跡爲一圓弧，其半徑隨θ_0的減小而增加。當聲波可往上傳播至海洋表面處時，若其傳播方向與海平面平行，則聲波將不會反射回海水內部，此種情況所對應的θ_0爲最小角，如右圖所示。

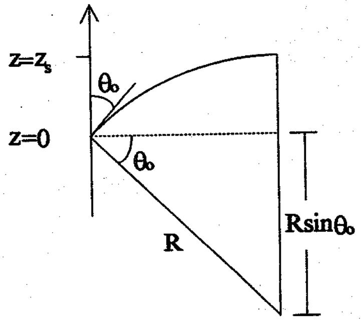


圖2-2

由圖2-2可看出　$z_s = R - R\ \sin\theta_0$

$$= R(1-\sin\theta_0) = \frac{c_0}{b\ \sin\theta_0}(1-\sin\theta_0)$$

$$\Rightarrow \theta_0 = \sin^{-1}\left[\frac{c_0}{b z_s + c_0}\right] \qquad (2\text{-}3)$$

(c) 由(a)題中知道聲波的圓弧軌跡，其半徑R爲聲波起始射出角θ_0的函數。若$\theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$，則聲波從聲源$S$傳至接收器$H$的路徑，有如下的可能情況：

(1) 如圖2-3所示的單一圓弧軌跡。

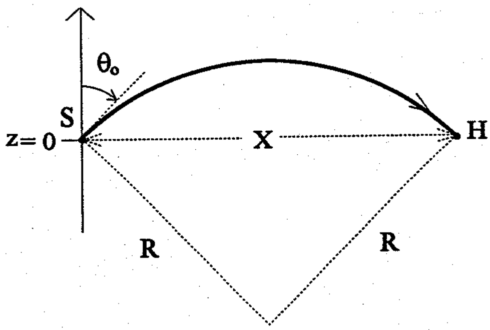


圖2-3

$$X = 2R\cos\theta_0 = \frac{2c_0}{b\sin\theta_0}\cos\theta_0$$

$$= \frac{2c_0}{b}\cot\theta_0$$

$$\Rightarrow \theta_0 = \cot^{-1}\frac{bX}{2c_0} \qquad (2\text{-}4)$$

(2) 如圖2-4所示的雙圓弧軌跡。聲波的起始射出角θ_0較前一情況稍大，其圓弧半徑則變小。自S所發出的聲波未到達H以前，即從$z>0$傳入$z<0$的區域，其軌跡變成爲倒轉的對稱圓弧。

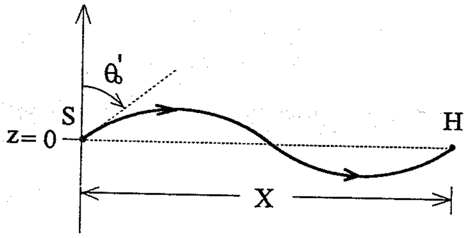


圖2-4

如同前一情況的推導，可得：$\dfrac{X}{2}=2R'\cos\theta_0=\dfrac{2c_0}{b}\cot\theta_0$

$$\Rightarrow\ \theta_0'=\cot^{-1}\frac{bX}{4c_0} \qquad (2\text{-}5)$$

一般而言，若$\theta_0<\pi/2$，欲使自S處往上射出的聲波能夠到達H，則其起始的射出角可自下式得出：

$$\theta_0=\cot^{-1}\left[\frac{bX}{2nc_0}\right]=\tan^{-1}\left[\frac{2nc_0}{bX}\right] \qquad (2\text{-}6)$$

式中 $n=1,2,3,4,\cdots\cdots$。

注意：當$n=\infty$時，$\theta_0=\dfrac{\pi}{2}$，即聲波沿水平方向直線傳播。

(d) 就所給的數據，$X=10{,}000\,m$；$c_0=1{,}500\,\mathrm{m/s}$；$b=0.02000\,s^{-1}$，利用(2-6)式可算出四個最小的起始射出角：

n	θ_0(°)
1	86.19
2	88.09
3	88.73
4	89.04

(e) 當聲波以(c)中之最小角射出時，其傳播軌跡爲單一圓弧如圖2-3所示，現重畫於右圖：

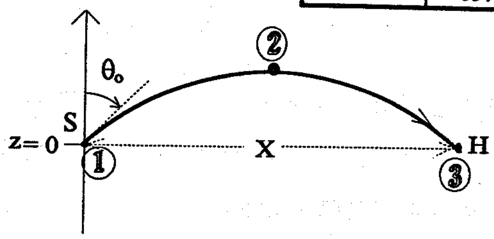


圖2-5

聲波從S傳至H所須的時間爲：

$$t_{13}=\int_1^3 dt=\int_1^3\frac{ds}{c}$$

由於軌跡對稱，上式可寫爲：$t_{13}=2t_{12}=2\displaystyle\int_1^2 dt=2\int_1^2\frac{ds}{c}=2\int_1^2\frac{Rd\theta}{c}$ (2-7)

由(1)和(2)兩式，得： $R=\dfrac{c_0}{b\sin\theta_0}=\dfrac{c}{b\sin\theta}$

以之代入(2-7)式，得：

$$t_{13}=\frac{2}{b}\int_{\theta_0}^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sin\theta}=\frac{2}{b}\left[\ln\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_{\theta_0}^{\pi/2}=-\frac{2}{b}\ln\tan\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \qquad (2\text{-}8)$$

以(d)中之最小角 θ_0 ($n=1$) $=86.19°$ 代入(2-8)式，計算得： $t_{13}=6.6546\ s$

若 θ_0 ($n=\infty$) $=\frac{\pi}{2}$ ，即聲波沿直線傳播，則： $t_{13}=\frac{X}{c_0}=6.6666\ s$

由上可知，沿單一圓弧傳播的聲波（即 $n=1$ 的模式），將比沿直線傳播的聲波（即 $n=\infty$ 的模式），早一點到達目的地。

評分標準：（本題總計20分）

(a) 6分， (b) 3分， (c) 4分， (d) 2分， (e) 5分

理論試題第三題：

(a) 圓柱體的體積 $=\pi a^2 ld$ 。由於細桿的質量等於圓柱體的質量，所以浮體的總質量等於 $2M=2\pi a^2 ld$ 。由圖3-1可求得浮體所排開的海水體積：

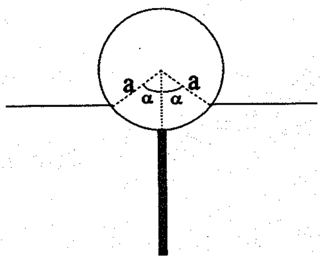


圖3-1

$$V=\pi a^2 l\left(\frac{2\alpha}{2\pi}\right)-(a\sin\alpha)(a\cos\alpha)l=la^2\alpha-la^2\sin\alpha\cos\alpha$$

由浮力原理知浮體的重量等於其所受的浮力，即：

$$2\pi a^2 ldg=V\rho g\Rightarrow 2\pi a^2 ld=la^2\rho(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2d\pi}{\rho} \qquad (3\text{-}1)$$

(b) 若將圓柱體自其平衡位置鉛直地下壓一小位移 z ，則該浮體所受的恢復力等於所增加排開的海水重量，即 $\rho(2a\sin\alpha)lz$ 。 題中假設水的動盪影響，使浮體的有效質量增加 $\frac{1}{3}$ 倍，因此浮體的運動方程式如下式：

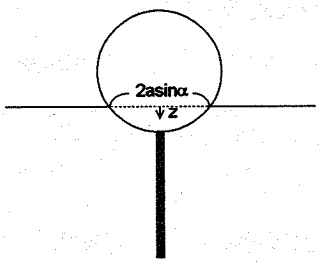


圖3-2

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)2M\ddot{z}=-2\rho glza\sin\alpha\Rightarrow\ddot{z}+\left(\frac{3\rho g\sin\alpha}{4\pi da}\right)z=0 \qquad (3\text{-}2)$$

(3-2)式爲標準的簡諧運動方程式。浮體的振動角頻率爲：

$$\omega_z=\sqrt{\frac{3\rho g\sin\alpha}{4\pi da}}=\sqrt{\frac{3g\sin\alpha}{2a(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)}} \tag{3-3}$$

上式中之ρ值，已利用(3-1)式代入。

(c) 如圖3-3所示，O點爲圓柱體的質心，P點爲圓柱體和細桿的銜接點。由於細桿的質量和圓柱體的質量相同，且桿長等於圓柱體的直徑，所以P點亦爲整個浮體的質心。浮體所受的重力和浮力如圖所示。題意假設浮體繞圓柱體的水平中心軸線擺動，因此可取O點作爲參考座標系的原點。設I_o代表浮體對O點的轉動慣量，則浮體的轉動方程式可寫成下式：

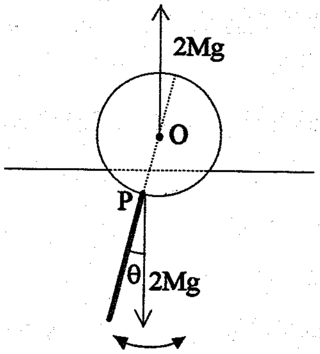


圖3-3

$$I_o\ddot{\theta}\approx-2Mga\,\theta\Rightarrow\ddot{\theta}+(\frac{2Mga}{I_o})\,\theta\approx0$$

欲求浮體擺動的週期，必須先定出I_o。今以I_1和I_2分別代表圓柱體和細桿對其個別質心的轉動慣量。

$$I_1=\frac{1}{2}Ma^2\quad,\quad I_2=\int_{-a}^{a}x^2(\frac{M}{2a})\,dx=\frac{1}{3}Ma^2$$

利用平行軸定理，可得細桿對O點的轉動慣量如下：

$$I_{2o}=\frac{1}{3}Ma^2+M(2a)^2=\frac{13}{3}Ma^2$$

因此可求得浮體對O點的轉動慣量爲：

$$I_o=I_1+I_{2o}=\frac{1}{2}Ma^2+\frac{13}{3}Ma^2=\frac{29}{6}Ma^2$$

以之代入浮體的轉動方程式，可得： $\ddot{\theta}+(\frac{12g}{29a})\theta\approx0$ (3-4)

此爲標準的簡諧運動方程式。浮體的擺動角頻率爲： $\omega_\theta=\sqrt{\frac{12g}{29a}}$ (3-5)

(d)由加速度計所測得的週期數據可得$T_\theta/T_z\approx1.5$，即$(\omega_z/\omega_\theta)^2\approx2.25$。將之

代入(3-3)和(3-5)，得：

$$2.25 \approx \frac{3g\sin\alpha}{2a(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)} / \frac{12g}{29a} \Rightarrow \alpha-\sin\alpha\cos\alpha \approx 1.61\sin\alpha \quad (3\text{-}6)$$

上式爲超越函數，只能尋求近似的數値解。由於 1.61 約略等於$\frac{\pi}{2}=1.571$，所以 (3-6)的近似解可看出爲 $\alpha\approx\frac{\pi}{2}$，即浮角約爲 90°。以此$\alpha$角代入(3-1)和(3-3)，可得：$\frac{4d}{\rho}\approx 1$ ，$\omega_z\approx\sqrt{\frac{3g}{\pi a}}$

因爲$T_z\approx 1s$，故：$1\approx(\frac{2\pi}{\omega_z})^2\approx\frac{4\pi^3 a}{3g} \Rightarrow a\approx\frac{3g}{4\pi^3}=0.237\ m$

題意假設圓柱體的長度等於 a，因此浮體的總質量爲：

$$2M=2\pi a^2 ld=2\pi a^2\cdot a\cdot\frac{\rho}{4}=\frac{\pi\rho a^3}{2}=\pi\times\frac{1000}{2}\times(0.237)^3\approx 20.9\ kg$$

評分標準：(本題總計20分)

(a) 1分 寫出浮體總質量$=2M=2\pi a^2 ld$。

1分 寫出$V=la^2\alpha-la^2\sin\alpha\cos\alpha$。

1分 寫出$\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2d\pi}{\rho}$。

(a)合計3分

(b) 1分 寫出浮體作垂直振動時所受的恢復力$-2\rho g l z a\sin\alpha$。

2分 寫出$\ddot{\theta}+(\frac{3\rho g\sin\alpha}{4\pi da})\theta\approx 0$。

1分 寫出$\omega_z=\sqrt{\frac{3g\sin\alpha}{2a(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)}}$。

(b)合計4分

(c) 1分 畫出浮體的受力圖。

2分 寫出$I_1=\frac{1}{2}Ma^2$。

1分 寫出$I_2=\frac{1}{3}Ma^2$。

1分 寫出$I_{2o}=\frac{13}{3}Ma^2$。

1分 寫出$I_o=\frac{29}{6}Ma^2$。

1分 寫出$\ddot{\theta}+(\frac{12g}{29a})\theta\approx 0$。

1分 寫出$\omega_\theta=\sqrt{\frac{12g}{29a}}$。

(c)合計8分

(d) 1分 寫出$(\omega_z/\omega_\theta)^2\approx 2.25$。

1分 寫出$\alpha-\sin\alpha\cos\alpha\approx 1.61\sin\alpha$。

1分 寫出$\alpha\approx\frac{\pi}{2}$。

1分 寫出$a\approx 0.237\ m$。

1分 寫出$2M\approx 20.9\ kg$。

(d)合計5分

(未完待續)