八十四學年度大學聯考
數學試題解答與評析

林礽堂
臺北市立建國高級中學

前　言

十多年來，常在科學性的刊物中拜讀數學先進們對當年大學入學考試數學試題的評論，個人不揣簡陋，參考了：陳昭地教授在《數學傳播季刊》第九卷第三期「七十四學年度大學入學考試數學科閱卷雜感」、朱建正教授在同一刊物中好幾期均有的「試題解答及評論」、石厚高老師在同一刊物中關於試題之評論等等諸先進的模式，野人獻曝一番，敬請諸位先進不吝指正。

壹、試題

一、八十四學年度大學暨獨立學院入學考試數學(自然組)試題

※本試題共分為兩部分。第一部分為單一選擇題，請將答案劃記在「答案卡」上。第二部分為非選擇題，請將答案寫在「非選擇題試卷」上。

第一部份：單一選擇題（共佔 20 分）

說明：本部分共有一、二兩大題，各分成 5 小題；答案卡上的題號係指小題題號，自第 1 題至第 10 題。請將你的答案劃記在「答案卡」上。每小題的 5 個備選答案中，只有 1 個是對的。答錯了倒扣¼題分；若不答，則得零分。

〔一〕九位學生的數學抽考分數分別為：30，40，60，50，70，80，60，90，60。

1. 這九個分數的中位數為何？

(A) 40　(B) 50　(C) 60　(D) 70　(E) 80

2. 這九個分數的標準差為何？

(A) $\dfrac{10\sqrt{34}}{9}$　(B) $\dfrac{10\sqrt{34}}{3}$　(C) $\dfrac{20\sqrt{7}}{9}$　(D) $\dfrac{20\sqrt{7}}{3}$　(E) $\dfrac{2800}{9}$

現在使用簡單隨機抽樣法，從這九個分數中取出三個。請回答下面三個小題。

3. 所取出三個分數中至少有一個爲60分的取法有幾種？

(A)18 (B)21 (C)35 (D)40 (E)64

4. 所取出三個分數的中位數等於60分的取法有幾種？

(A)18 (B)27 (C)43 (D)46 (E)55

5. 若已知所取出三個分數中有一個爲70分，則在此條件之下，此三個分數的中位數爲60分的機率爲何？

(A) $\frac{3}{14}$ (B) $\frac{3}{7}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{15}{56}$

〔二〕考慮一次方程式組 $M_t\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$，其中 $M_t=\begin{bmatrix}t & 1\\3-t & t+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\t+3 & 3t+1\end{bmatrix}$，$t$ 爲實數。

6. 使此方程組恆有解的充分且必要條件爲何？

(A) $t\neq 5$ (B) $t\neq 1$ (C) $t\notin\{1,5\}$ (D) $t\notin\{1,-3,5\}$ (E) $t\notin\{-3,1\}$

7. 當 t 滿足第6題的正確條件時，下列何者成立？

(A) 對於任何一對 a、b，此方程組恰有一組解

(B) 對於任何一對 a、b，此方程組都有無限多組解

(C) 僅只有一對 a、b，使此方程組恰有一組解

(D) 僅只有一對 a、b，使此方程組有無限多組解

(E) 有不只一對（但非所有的）a、b，使此方程組有無限多組解

若 $t=0$，$a=0$，$b=-1$，則

8. $\det(M_0^{-1})=$ (A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{15}$ (D) 1 (E) 0

9. $x=$ (A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{15}$ (D) 1 (E) 0

10. $y=$ (A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{15}$ (D) 1 (E) 0

第二部分：非選擇題（四大題，共佔80分）

注意：請勿將無理數或無限小數寫成有限小數。例如，不要把$\sqrt{2}$寫成1.414，也不要把1/3寫成0.333。

一、填充題：本題共有十個空格，每個空格5分，請答在「非選擇題試卷」上的第一欄，務必寫上格號（A，B，…，J）後，再寫答案。（為節省空間，本題作答請不要寫出演算過程。）

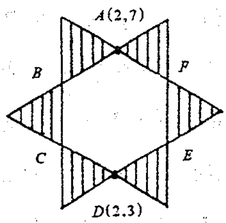
1. 設一圓與直線$2x-5y-6=0$及$2x-5y+10=0$都相切，且圓心在直線$x-2y+2=0$上，則此圓的方程式為＿(A)＿。

2. $\triangle ABC$的三頂點坐標為$A(2,-3,5)$，$B(3,0,10)$，$C(x,y,0)$，則使$\triangle ABC$的周長為最小的點C坐標為＿(B)＿。

3. 設$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=1+\sqrt{3}$，$\angle A=30°$，則$\overline{BC}$的長度為＿(C)＿，$\angle C$的大小為＿(D)＿度。

4. 曲線$y=x^4-2x^3-x^2+2x$與x軸的交點中，最左端的點坐標為＿(E)＿。此曲線與x軸所圍成區域的面積為＿(F)＿。（化為最簡分數）

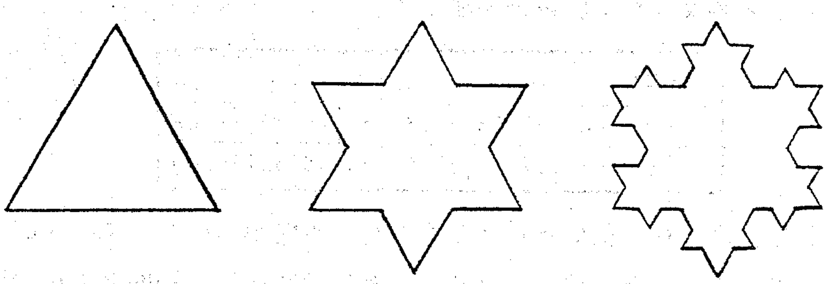
5. 右圖中$ABCDEF$為正六邊形，將各邊延長形成一個六角星形。令正六邊形所圍成之區域為R_1，斜線區域為R_2，設$f(x,y)=5x-4y$，則$f(x,y)$在R_1上之最大值為＿(G)＿；f在R_2上之最小值為＿(H)＿。



6. 設$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{3q}=12$，其中$p$、$q$為正數，則$3\log_{1/3}p+\log_{1/3}q$的最大值為＿(I)＿，此時$(p,q)=$＿(J)＿。

說明：以下第二題至第四題為計算題，每題10分。請將演算過程寫在「非選擇題試卷」上，務必先標明題號（二、三、四），再作答。

二、設$T_1,T_2,T_3,\cdots$為一群多邊形，其作法如下：T_1為邊長等於1之正三角形；以T_n每一邊中間三分之一的線段為一邊向外作正三角形，然後將該三分之一線段抹去所得的多邊形為T_{n+1}，$n=1,2,\cdots$（如圖所示）。令a_n表T_n的周長，請計算T_3之面積及$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$之和。



T_1 T_2 T_3

三、試就實數 k 之值的變化，討論二元二次方程式

$$x^2+y^2+2x+2y+k(x^2-y^2+2x+2y)=0$$

的圖形。

四、考慮函數 $f(x)=\cos 2x+4\sin^2 x-\cos x-2$。

1. 解方程式 $f(x)=0$。
2. 在 $0\leq x\leq 2\pi$ 的條件下，解不等式 $f(x)>0$。

二、八十四學年度大學暨獨立學院入學考試數學(社會組)試題

※本試題共分成兩部份：單一選擇題及非選擇題

第一部份：單一選擇題（四題，共20分）

說明：①每題各有5個備選答案，請選出一個正確答案，劃記在「答案卡」上。

②每題5分，答錯倒扣題分之¼；整題完全不作答者，視同放棄，不給分亦不扣分。

1. 若實數 x 滿足不等式 $\log_3(3^x+8)<\dfrac{x}{2}+1+\log_3 2$，則 x 的範圍為

(A) $\log_3 2<x<\log_3 8$ (B) $1<x<\log_3 12$ (C) $\log_3 4<x<\log_3 8$
(D) $\log_3 4<x<\log_3 16$ (E) $\log_3 8<x<\log_3 16$

2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{BC}=1$，$\sin A<\sin B$，且 $\sin A$ 與 $\sin B$ 為 $8x^2-4\sqrt{3}x+1=0$ 的兩根，則 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑等於

(A) $\sqrt{3}-1$ (B) $2\sqrt{3}-1$ (C) $\sqrt{3}+1$ (D) $\sqrt{3}+2$ (E) $2\sqrt{3}+1$

3. 方程式 $x+y+z+u\leq 9$ 之正整數解之個數為

(A) $\sum_{k=1}^{9} H_k^4$ (B) $1+\sum_{k=1}^{5} H_4^k$ (C) $9!/5!$ (D) 56 (E) 126

4. 十位考生之國文與數學成績列表如下：

考生編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
國文	89	65	76	69	82	57	66	72	78	66
數學	75	57	65	65	83	63	58	62	63	69

今已算出國文成績之標準差爲8.9（取至小數點第一位），數學成績之標準差爲7.5（取至小數點第一位），則此十位考生兩科成績之相關係數最接近

(A) -0.85 (B) 0.25 (C) 0.66 (D) 0.78 (E) 0.85

第二部份：非選擇題（三大題，共80分）

說明：①第一大題爲塡充題，共有12個空格，每個空格5分，必須在「非選擇題試卷」上第一欄開始作答；爲節省空間，請不要寫出演算過程，但務必寫上格號（A，B，…，L）後，再寫答案。

②第二及第三大題爲計算題，每題10分，作答在「非選擇題試卷」上；必須寫明題號（二或三），並寫出演算過程！

③請勿將無理數或無限小數寫成有限小數，否則不予計分。例如，不要把$\sqrt{2}$寫成1.414，也不要把$\frac{1}{3}$寫成0.333。

一、塡充題：

1. 已知n及k爲正整數，且$n>k$，若$C^n_{k-1}:C^n_k:C^n_{k+1}=1:2:3$，則$n=$ __(A)__

2. 設有一複數等比數列，首項爲$1+2i$，第二項爲$3+i$，則此數列前五項之和爲 __(B)__ 。

3. 若多項式$f(x)=2x^3-4x^2+2x+(2c+4)$與多項式$g(x)=3x^3-6x^2+2x+(3c+5)$的最高公因式爲一次式，則c之值爲 __(C)__ 。

4. 若圓C通過點$(4,2)$及點$(1,-5)$，且其圓心在直線$x-3y-7=0$上，則C之圓心是 __(D)__ ，半徑是 __(E)__ 。

5. 若α及β爲兩實數，且聯立方程式

$$\begin{cases}(1-\alpha)x+7y=1\\ x+y+\alpha z=\beta\\ 2\alpha y+z=0\end{cases}$$

有兩組以上之解，則α之值爲 __(F)__ ，β之值爲 __(G)__ 。

6. 空間上一平面E與正X軸，正Y軸及正Z軸分別交於A、B、C三點。已知C點之坐標爲$(0,0,1)$，$\overline{CA}=\overline{CB}$，且$\triangle ABC$之面積爲$\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$，則$A$點之坐標爲___(H)___，平面$E$之一個單位法向量爲___(I)___。

7. 一盒中有10個球，球上分別印有號碼1到10。今由盒中取4球，則4球之號碼中第二大數目是7的機率爲___(J)___。

8. 設有一橢圓形運動場地。令長軸兩頂點爲A及B，短軸兩頂點爲C及D。在D點豎有一垂直於地面的旗竿，高10公尺。若從C點地面到旗竿頂的仰角爲$22.5°$，而$\angle ACD=60°$，則短軸$\overline{CD}$之長度爲___(K)___公尺，長軸$\overline{AB}$之長度爲___(L)___公尺。

二、若$\triangle ABC$的三頂點坐標爲$A(2,5)$，$B(5,1)$及$C(3,7)$，P爲線段$\overline{BC}$上的一點，且向量$\overrightarrow{AP}$在向量$\overrightarrow{AB}$上的正射影向量爲$\left(\dfrac{6}{25},\dfrac{-8}{25}\right)$，試求$P$點的坐標。

三、已知拋物線Γ之頂點爲$(2,2)$，準線爲$x=1$。L爲通過點$(0,3)$之直線，其斜率大於0，且L與Γ有唯一之交點Q。試求L之斜率及Q點之坐標。

貳、參考解答

以下所列「解一」與「解答」爲作者班上今年應考學生徐偉仁之實際解答，「解二」爲作者所提供的解答。以參加今年聯考的應屆畢業生在考場所做之解答作爲我評註之依據，目的有二：其一是提供今年命題先生瞭解命題時所欲評量之概念、方法，是否在學生的解答中呈現出來，換言之，檢查命題旨意果眞評量到了，以供未來命題參考；其二是能避免高中教師觀點所做的主觀評註，從學生觀點予以考慮，俾助教學相長。(附註:該生於考場選擇題〔二〕的6.、7.、8.未作答，非選擇題第四題第1.小題解答中未考慮同界角，其解答是於第二日考畢回家後自行解出來的。下列社會組解答也是由該生所作。比較淺易的試題，不列出過程，逕給答案。)

㈠ 自然組試題參考解答

第一部份：單一選擇題

1. (C)。 2. (D)。 3. (E)。 $\binom{3}{1}\binom{6}{2}+\binom{3}{2}\binom{6}{1}+\binom{3}{3}=64$

4. (D)。 $\binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{3}{1}+\binom{3}{2}\binom{6}{1}+\binom{3}{3}=46$ 5. (B)。

6. (D)。

解一：$M_t=\begin{bmatrix} t & 1 \\ 3-t & t+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ t+3 & 3t+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2t+3 & 5t+1 \\ t^2+3t+6 & 3t^2+2t+7 \end{bmatrix}$

$$M_t\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\Longleftrightarrow\begin{cases}(2t+3)x+(5t+1)y=a \\ (t^2+3t+6)x+(3t^2+2t+7)y=6\end{cases}$$

使方程組恆有解，即

$$\frac{2t+3}{t^2+3t+6}\neq\frac{5t+1}{3t^2+2t+7}$$

$$\Longleftrightarrow 6t^3+13t^2+20t+21\neq 5t^3+16t^2+33t+6$$

$$\Longleftrightarrow t^3-3t^2-13t+15\neq 0 \Longleftrightarrow t\neq 1,-3,5$$

解二：方程組恆有解的充要條件是 $\det M_t\neq 0$，而

$$\det M_t=\det\begin{bmatrix} t & 1 \\ 3-t & t+1 \end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ t+3 & 3t+1 \end{bmatrix}$$

$$=(t^2+2t-3)(t-5)=0\Longleftrightarrow t=1,-3,5$$

故原方程組恆有解的條件是 $t\neq 1,-3,5$。

7. (A)。 由 $t\notin\{1,-3,5\}$ 知

$$\frac{2t+3}{t^2+3t+6}\neq\frac{5t+1}{3t^2+2t+7}$$

故不論 a、b 爲何，方程組均恰有一解。

8. (C)。

解一：由 $M_0=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ 進行基本列運算得

$$\begin{bmatrix}3&1&1&0\\6&7&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&1&1&0\\0&5&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&1&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&\frac{7}{15}&-\frac{1}{15}\\0&1&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

$$M_0^{-1}=\begin{bmatrix}7/15&-1/15\\-2/5&1/5\end{bmatrix}$$

$$\det(M_0^{-1})=7/75-2/75=5/75=1/15$$

解二：由$M_0M_0^{-1}=I$ 知 $\det(M_0^{-1})=1/\det M_0$，

而 $\det M_0=(-3)(-5)=15$，故 $\det(M_0^{-1})=1/15$。

9. (C)。

10. (B)。

解一：直接解

$$\begin{cases}3x+y=0\\6x+7y=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1/15\\y=-1/5\end{cases}$$

解二：由 $\det M_0=15$ 代矩陣乘法反元素公式得

$$M_0^{-1}=\begin{bmatrix}7/15&-1/15\\-2/5&1/5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=M_0^{-1}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/15\\-1/5\end{bmatrix}$$

第二部份：非選擇題

一、填充題

1. 解 $\begin{cases}x-2y=-2\\2x-5y=-2\end{cases}$

得圓心 $(x,y)=(-6,-2)$，圓方程式 $(x+6)^2+(y+2)^2=64/29$

2. B 點對 xy 平面的鏡射為 $B'(3,0,-10)$，

$$\overleftrightarrow{AB'}:\ \frac{x-3}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+10}{-15}$$

$\overleftrightarrow{AB'}$和 xy 平面交點為 $(7/3,-2,0)$ 即為 C 點。

3. (C) $\sqrt{2}$，(D) 45

4. 因式分解

$x^4-2x^3-x^2+2x=x(x+1)(x-1)(x-2)=0 \Longleftrightarrow x=-1,0,1,2$

故最左端點為 $(-1,0)$。

$$面積=\int_{-1}^{0}(-x^4+2x^3+x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{1}(x^4-2x^3-x^2+2x)\,dx$$

$$+\int_{1}^{2}(-x^4+2x^3+x^2-2x)\,dx=\frac{49}{30}$$

5. (1) $f(x,y)=5x-4y$ 為一斜率 $5/4$ 的移動直線，觀察知在 R_1 區之最大值在頂點 E 發生，而 E 之坐標利用 D 點坐標及"30°－60°－90°直角三角形"的邊長關係求得為 $E(2+\sqrt{3},4)$，故最大值 $f(2+\sqrt{3},4)=5\sqrt{3}-6$。

(2) R_2 區之最小值在 A 與 B 兩點間的頂點發生，故最小值 $f(2-\sqrt{3},8)=-22-5\sqrt{3}$。

6. 解一：$3\log_{1/3}p+\log_{1/3}q=\log_{1/3}p^3q$，而

$$3=\frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{3q}}{4}=\frac{\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{3q}}{4}\geq\sqrt[4]{\frac{1}{81p^3q}}\Longleftrightarrow 81\geq\frac{1}{81p^3q}$$

$$\Longleftrightarrow p^3q\geq\frac{1}{3^8}$$

由於 $\log_{1/3}p^3q$ 在 p^3q 最小時有最大值，故 $\log_{1/3}p^3q$ 之最大值 $=8$。等號成立條件為 $1/3p=1/3q$，即 $p=q$，故 $4/3q=12$，$q=1/9$，$(p,q)=(1/9,1/9)$。

解二：由 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{3q}=12$ 得 $p=\dfrac{3q}{36q-1}$

設 $f(q):=3\log_{1/3}\dfrac{3q}{36q-1}+\log_{1/3}q$

$$f'(q)=\ln\frac{1}{3}\left[3\cdot\frac{36q-1}{3q}\cdot\frac{3(36q-1)-108q}{(36q-1)^2}+\frac{1}{q}\right]=0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{-3}{q(36q-1)}+\frac{1}{q}=\frac{-3+36q-1}{q(36q-1)}=0$$

$$\Longleftrightarrow 36q-4=0 \quad \Longleftrightarrow q=\frac{1}{9}$$

$\Longleftrightarrow p=\frac{1}{9}$ 代回 $f(\frac{1}{9})=8$ 為最大值

二、T_3 面積＝1 個邊長為 1 之正△＋3 個邊長為 1/3之正△＋12 個邊長為 1/9 之正△

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\frac{1}{9}\cdot 3+\frac{1}{81}\cdot 12)=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{40}{27}=\frac{10\sqrt{3}}{27}$$

每進行一次變換，周長即變為原來之 4/3 倍。因此

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{a_n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1/3}{1-3/4}=\frac{1}{3}\cdot 4=\frac{4}{3}$$

三、解一：$k=1$ 時 $2x^2+4x+4y=0 \Longleftrightarrow 4y=-2(x+1)^2+2$ 為一拋物線

$k=0$ 時 $x^2+y^2+2x+2y=0$ 為一圓

$k=-1$ 時 $2y^2=0$ 為兩重合直線

由 $x^2+y^2+2x+2y+k(x^2-y^2+2x+2y)=0$

$\Longleftrightarrow (1+k)x^2+(1-k)y^2+(2+2k)x+(2+2k)y=0$

觀察判別式

$-4(1+k)(1-k)<0 \Longleftrightarrow -1<k<1$ 但 $k\neq 0$ 時為一橢圓，

$-4(1+k)(1-k)>0 \Longleftrightarrow k>1$ 或 $k<-1$ 時為一雙曲線。

解二：

(1) 當 $k=0$ 時，則 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$ 圖形為圓

$(1+k)x^2+(1-k)y^2+2(1+k)x+2(1+k)y=0$

(2) 當 $1+k=0 \Longleftrightarrow k=-1$ 時，則 $y^2=0$，圖形為二重合直線。

(3) 當 $1-k=0 \Longleftrightarrow k=1$ 時，則 $x^2+2x+2y=0$，$y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{2}$，

圖形為拋物線。

(4) 當 $(1+k)(1-k)\neq 0$ 時，則

$$(1+k)(x+1)^2+(1-k)\left(y+\frac{1+k}{1-k}\right)^2=1+k+\frac{(1+k)^2}{1-k}=\frac{2(1+k)}{1-k}$$

化成 $$\frac{(x+1)^2}{2/(1-k)}+\frac{[y+(1+k)/(1-k)]^2}{2(1+k)/(1-k)^2}=1$$

分母乘積 $p=\dfrac{2}{1-k}\cdot\dfrac{2(1+k)}{(1-k)^2}=\dfrac{4(1+k)}{(1-k)^3}$

所以1° $p>0 \Longleftrightarrow (1+k)(1-k)>0 \Longleftrightarrow -1<k<1$ 橢圓

2° $p<0 \Longleftrightarrow k>1$ 或 $k<-1$ 雙曲線

於是

雙曲線		橢圓		橢圓		雙曲線
	-1		0		1	
	重合二直線		圓		拋物線	

四、1. $f(x)=\cos 2x+4\sin^2 x-\cos x-2=2\cos^2 x-1+4(1-\cos^2 x)-\cos x-2=0$

$\Longleftrightarrow -2\cos^2 x-\cos x+1=0 \Longleftrightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0$

$\Longleftrightarrow (2\cos x-1)(\cos x+1)=0 \Longleftrightarrow \cos x=1/2$ 或 -1

故 $x=2n\pi+\dfrac{\pi}{3}$ 或 $2n\pi+\pi$ 或 $2n\pi+\dfrac{5\pi}{3}$ $(n\in Z)$

2. 由1.知 $f(x)>0 \Longleftrightarrow (2\cos x-1)(\cos x+1)<0 \Longleftrightarrow -1<\cos x<\dfrac{1}{2}$

故由 $0\leq x\leq 2\pi$ 得 $\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{5\pi}{3}$ 。

(二) 社會組試題參考解答

第一部份：單一選擇題

1. (D)。 $$\log_3(3^x+8)<\frac{x}{2}+1+\log_3 2$$

$\Longleftrightarrow \log_3(3^x+8)<\log_3 3^{x/2}+\log_3 3+\log_3 2 \Longleftrightarrow 3^{x/2}\cdot 6>3^x+8$

$\Longleftrightarrow 6y>y^2+8 \Longleftrightarrow (y-4)(y-2)<0 \Longleftrightarrow 2<y<4$ （設 $y=3^{x/2}$ ）

$\Longleftrightarrow 2\log_3 2<x<2\log_3 4 \Longleftrightarrow \log_3 4<x<\log_3 16$

2. (C)。

由公式得

$$x=\frac{2\sqrt{3}\pm 2}{8}=\frac{\sqrt{3}\pm 1}{4}$$

故 $\sin A=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$， $\sin B=\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

由正弦定理得 $2R=\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{1}{(\sqrt{3}-1)/4}=2\sqrt{3}+2 \Longleftrightarrow R=\sqrt{3}+1$

3. (E)。

所求個數即為方程式 $x+y+z+u+w=10$ 之正整數解個數，

即 $\binom{9}{4}=126$ 。

4. (C)。

計算國文、數學成績平均分別為72、66，代入相關係數公式 $\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{nS_xS_y}$，

花幾分鐘便可算得答案0.66 。

第二部份：非選擇題

一、填充題

1. $C^n_{k-1}:C^n_k:C^n_{k+1}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{(k-1)!}:\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}:\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}$

$$=1:\frac{n-k+1}{k}:\frac{(n-k+1)(n-k)}{k(k+1)}=1:2:3$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}(n-k)/(k+1)=3/2\\(n-k+1)/k=2\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}n=14\\k=5\end{cases}$$

2. 公比 $=\frac{3+i}{1+2i}=1-i$

$$和=\frac{(1+2i)[1-(1-i)^5]}{1-(1-i)}=\frac{(1+2i)(5-4i)}{i}=6-13i$$

3. $3f(x)-2g(x)=2x+2$ 為 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高公因式，因此 $f(-1)=-2-4-2+2c+4=0$，即 $c=2$。

4. 圓心在 $(4,2)$ 和 $(1,-5)$ 的中垂線上，即在 $3x+7y=-3$ 上，滿足

$$\begin{cases}3x+7y=-3\\ x-3y=7\end{cases} \iff \begin{cases}x=5/2\\ y=-3/2\end{cases}$$

$$半徑=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{58}}{2}$$

5. 後二式消去 z 得 $x+(1-2\alpha^2)y=\beta$，與第一式聯立，因有兩組以上之解，所以

$$\begin{vmatrix}1-\alpha & 7\\ 1 & 1-2\alpha^2\end{vmatrix}=2\alpha^3-2\alpha^2-\alpha-6=(\alpha-2)(2\alpha^2+2\alpha+3)=0$$

因 $2^2-4\cdot2\cdot3=-20<0$ 故 $\alpha=2$，代回得

$$\begin{cases}-x+7y=1\\ x-7y=\beta\end{cases}$$

於是 $\beta=1$。

6. 設 $A(a,0,0)$，$B(0,a,0)$，則 $\overline{AB}=\sqrt{2}a$

$$點 C 與直線 AB 之距離=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+1}=\frac{\sqrt{4+2a^2}}{2}$$

$$\triangle ABC 面積=\frac{1}{2}\sqrt{2}a\cdot\frac{\sqrt{4+2a^2}}{2}=\frac{3\sqrt{7}}{2}\iff\sqrt{2a^2+a^4}=\sqrt{63}$$

$$\iff a^4+2a^2-63=(a^2+9)(a^2-7)=0$$

故 $a=\sqrt{7}$。

E 之法向量 $(\sqrt{7},0,-1)\times(0,\sqrt{7},-1)=(\sqrt{7},\sqrt{7},7)$，

一單位法向量為 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$ 或 $\left(\frac{-1}{3},\frac{-1}{3},\frac{-\sqrt{7}}{3}\right)$。

7. $\binom{3}{1}\binom{6}{2}\Big/\binom{10}{4}=\frac{45}{210}=\frac{3}{14}$。

8. $\overline{CD}=10\cot 22.5^\circ=10\cdot\dfrac{1+\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ}=10\cdot\dfrac{1+1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}=10(\sqrt{2}+1)$

$$\overline{AB}=2\left(\frac{\overline{CD}}{2}\right)\tan 60^\circ=10(\sqrt{2}+1)\cdot\sqrt{3}=10(\sqrt{6}+\sqrt{3})$$

二、$\overleftrightarrow{BC}$：$3x+y=16$，設其上動點 $P(t,16-3t)$，則 $\overrightarrow{AP}=(t-2,11-3t)$，$\overrightarrow{AB}=(3,-4)$。由

$\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影

$$=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}(\overrightarrow{AB})=\frac{15t-50}{25}(3,-4)=\left(\frac{6}{25},\frac{-8}{25}\right)$$

得 $t=\dfrac{52}{15}$，$P\left(\dfrac{52}{15},\dfrac{28}{5}\right)$

三、L 與 Γ 有唯一之交點 Q，即 L 與 Γ 之切線。設 L 之斜率為 m，

$$L: m=\frac{y-3}{x}\iff mx-y+3=0$$

$$\Gamma:(y-2)^2=4\cdot 1\cdot(x-2)$$

以 $y=mx+3$ 代入 Γ 之方程式得

$$(mx+1)^2=m^2x^2+2mx+1=4x-8\iff m^2x^2+(2m-4)x+9=0$$

有重根。計算判別式知

$$(2m-4)^2-4m^2\cdot 9=-32(m+1)\left(m-\frac{1}{2}\right)=0\quad(-1\text{ 不合})$$

以 $L: x-2y+6=0$ 代入 Γ 的方程式得 $Q(6,6)$。

参、評　論

以下試題評論的基準包括：

(1) 解或證明所需之關鍵知識

(2) 計算性、套公式性、理解性……

(3) 猜測試題之評量目標

(4) 在整個理論系統中所佔之份量（即試題本身暗示數學上一個完整的結果，或僅是附屬過程的一部份、次要結果，或試題是重要事實或數學方法的特殊簡化情形等)

自然組試題的最大特點是：最近幾屆試題幾乎都是與坊間升學性參考書在本質、面貌上酷似之陳舊成題，而今年的成題依個人徵詢作者班上幾位應屆畢業之考生得以下諸題：第一部份中〔一〕的1.及2.，第二部份中一、的1.、2.、3.、4.及四、，共佔44分，與今年數學成績的高標準分數45分僅一分之差，雖無統計資料可供參考，但由此也可約略窺見其相關性，建議明年起主辦大學入學事務的常設機構大學入學考試中心不妨以歷屆試題進行類似分析，供未來命題之參考。

其餘的56分均非成題，但卻命題靈活，且是簡單容易、確實能在應試時間內解答的試題。以下針對「非成題」表示個人意見。

選擇題〔一〕的3.、4.、5.三小題，是別出心裁的排列組合題目，有別於一般刻意編出、與現實生活較脫節的練習題，惟第3.小題「…三個分數…」的敍述若改爲「…三位學生之分數…」，考生比較容易區別是否爲「同物」，而不須從選擇項目給的答案去判別命題先生之主旨。作者猜想這三小題會給命題先生一些困擾，畢竟大學入學考試不能像商業機構招考職員，經理面試「請問一年有幾季？」，出題者心理是應試者非常需要考慮的重點，而回答「在我們生意人心裡，一年只有淡季和旺季」。

〔二〕所以被我歸類爲非成題，是依照這一代教材的內容爲準，因爲這一代教材並未提及「矩陣積的行列式值等於行列式值的積」的性質，作者所徵詢的學生均直接將矩陣乘開再求其行列式值，雖然一樣可以得到解答但是工程較爲浩大，也容易出差錯，當然所耗時間也較久。高中內容的矩陣強調的是在線性方程組的求解方法及其解的狀況的討論，而本題也的確評量了利用矩陣的求解方法，命題的確達到教學重點。但從考生之解答可以看出，本題反而偏重於計算性，作者猜測與命題先生把本題安排成選擇題之目的也許有出入。

非選擇題一、的第5.題有兩個特點，一是圖形上沒有畫出坐標軸，不會分散考生的注意力，二是進行線性規畫時只會代入各頂點坐標求最大、最小值的學生佔不到便宜，也就是說著重了求線性函數最大、最小值的方法。評量「解題方法」自然比評量「記誦能力」要來得有教育價值。

第6.題同時評量了三種數學觀念：平均數定理的正確應用、對數運算的性質、以及對數函數的增減性，綜合得頗爲巧妙。本題之正確解答有兩個關鍵，理解性遠大於計算性，是一道頗爲成功的填充題。這一題也可以利用微分方法求解。

非選擇題第二題是最有創意的題目，一則1904年瑞典人Helge von Koch受到Karl Weierstrass及Giuseppe Peano的啓發，也提出了處處連續且處處不可微分的雪花曲線，它爲未來微積分作嚴格的理論探討提供了最佳見證，二則引起學生對一九七五年前後蓬勃發展的新興數學如分形幾何（fractal）的興趣。其實若將本題改爲「考慮下列二極限 $\lim_{n\to\infty} t_n$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，若存在則求其值，若不存在請說明理由，其中 tn 是 Tn 的面積」，則更能凸顯Koch雪花曲線的特徵：一個似乎與直覺矛盾的結果，在有限的空間中有無限長的線。

非選擇題第三題，課本並不強調這段內容，但在基礎數學第三册第四章「圓錐曲線」開頭有提到二次方程式可能的圖形種類。一般考生均不知如何窮盡而又不重複地討論各種情形，多數考生的解答諒必較雜亂而無系統。由以上學生所提供得滿分的解答可見評分頗具彈性，其作法值得肯定。本題不失是把二元二次方程式的圖形分類能力作一統整評量。如果常常有類似這麼樣的試題出現於入學考試或學力評量中，對於學生做功課、學習新事物的方法及過程，諒必能提供正面的教育作用。華羅庚曾說研讀數學書要「從薄讀到厚，再從厚讀到薄」，強調的就是這種統整的能力。

自然組試題於各册之分佈，若將填充題一、6.歸成第二册（亦可歸成理上）是

	題　號	所佔分數
第一册	一、5.　一、4.(E) 二、	25分
第二册	一、3.　一、6.　四、	30分
第三册	一、1.　一、2.　三、	20分
第四册	〔一〕	10分
理　上	一、4.(F)	5分
理　下	〔二〕	10分

此時，顯然《理科數學》所佔分數偏低，尤其是上册僅佔5分，而且這5分是要經過繁且無高中層次應有重要性之無味計算才能得出填充題要求的答案，安排於填充題實在很難評鑑考生之能力。如果《理科數學》所佔分數太低，容易造成「高中階段爲社會組之考生」跨類組來考試也沒有吃虧；相對地，多學一年《理科數學》的自然組學生也沒得到肯定。這是這份試題稍嫌敗筆處。

不過總的來看，這份自然組試題，對於數學能力優異的學生來說，的確有脫穎而出的機會，大大提高了數學能力的鑑別度。

接下來分析社會組試題。第一部份單一選擇題，除了第3.題能出成選擇題外，其餘

3題以選擇題方式出現實在値得商榷。依命題原則來說，選擇題應該是「概念性」的試題，按數學概念便能從選目中立刻剔除一兩個選目，再經過非常簡易之計算或推演，又去除一兩個選目而得答案。而從錯誤概念出發導出的答案也該在選目中出現，在數學教育過程中這是發現學生錯誤模式而加以診斷的最好命題方式。這次選擇題的選目安排顯然並未達到這兩點要求。若僅根據這3題的難度及命題技術來看，今年社會組每一試題都可出成選擇題。

塡充題的計算過程均繁且難，尤其是第5.6.兩題。計算過程多的題目並不適合出成塡充題，塡充題的計算應不超過兩步驟，試題之鑑別度才會高。

社會組試題在各册之分佈是

	題　號	所佔分數
第一册	塡充3.	5分
第二册	選擇1.2.　塡充2.8.　二、	35分
第三册	塡充4.5.6.　三、	40分
第四册	選擇3.4.　塡充1.7.	20分

顯然第一册所佔分數偏低，而二、三册共佔了75分，有可能誤導偷機取巧。整份社會組試題全部是難度不低的陳舊成題。若這些試題是考生在考場才初次遇到，諒考試必不會獲得好成績；高標36分、低標21分是最佳證明。但同樣的試題對那些操作「坊間升學性參考書或補習班講義」熟練的考生確實給予頗大的鼓勵，從報紙上的補習班廣告便可獲得證實，實在是嚴重地誤導教與學。

站在教學正常化的立場來看，一份與大學入學有關的試題出的是否得當，衡量標準之一是：該年補習班是否大作其學生得高分的廣告。若如此，則表示該年的試題出得不夠用心。我想大學教授們也一定不願意收到靠惡性補習取得高分的考生吧。事實上，有些補習班在聯考前兩、三個月會舉行有獎金的模擬考試，聯考後便把這些僅參加模擬考試的學生當成他們所培育的學生，並藉此作爲招生廣告。

總觀社會組試題，選擇題的難度最高，它比塡充題及計算題都難於爭得分數，就是同今年自然組試題來比，也困難得多，而選擇題又是安排在最開頭的試題，這對甫入試場的考生來說，實是最無情的一擊。更具體的說，第3.題雖是較適合以選擇方式命題，但若應試前未曾遇見，絕對是很難眞正解答出來，亦即本題是「背多分」試題；第4.題作者曾請去年、今年兩度獲得國際數學奧林匹亞銀牌獎的國手陳和麟同學當著我面前解答，他

花了4分 45秒（不含看題目及畫記答案的時間）才算完，遑論考場中的社會組考生。

肆、結論與建議

人類的一切活動，包括教育與學習，都包含了自身取捨的價值觀，也就是什麼要、什麼不要，以及做事的優先順序。而取捨價值的出現與確定，最主要源自兩點：

(1) 教育：家庭教育、社會上的潛移默化；

(2) 社會上的壓力：社會對於個人行為的報酬與懲罰。這一點，人類和動物差別不大，是制約反應。

數學是思維的訓練而非操作的訓練，所以引發孩子主動去思考問題是學習數學的旨趣，幫助孩子看清問題所在、鼓勵他們去克服解題困難、使他們逐步從摸索過程學會切入問題核心，這才是有意義而成功的學習，也才是數學教育應該灌輸給孩子的價值觀。

這份自然組試題具有雙層意義：一則經由「考試領導教學」的事實，鼓勵「正確而且認眞」教學的師生；教師能從其中肯定其教學方向，學生能放心地揚棄題海策略之自我訓練，而朝各種方向、觀點去體會課本中的教材，進而「掌握基本材料」，建立堅實之基礎，理解數學定義、定理、原則的本質，並提昇分析、解決問題的能力。以這樣的方法，鼓勵了那些本著正常教學、學習，努力探討數學觀念來龍去脈，積極培養綜合、歸納、推理、思考能力，重視理論架構、連貫性及整體性的師生；這對一般高中數學教育起了正面的貢獻。

二則經由「聯考獲得高分」的過程，選拔出數學特優之學生，給這類學生的大學入學提供了更佳的選擇機會，相對的，在大學教學中才有給以高品質訓練的對象。互動之下，對於學生個人學術能力的養成，應有幫助。以現行大學入學方式，大多仍倚賴聯合入學考試的模式，若能持續這種命題方向，應能對我國數學教育素質的提昇有積極而重大的促進作用。

對於這份試題的優點，作者願提供以下實證供命題先生及來年考生作為參考：作者任教班級，參加台北市某著名補習班補習之學生，平均分數比其餘人平均分數少了六分。舉班上兩個學生的模擬考與聯考數學成績排名為例：

	模擬考1	模擬考2	模擬考3	聯　考
參加補習某生	5/38	5/33	2/33	30/33
未補習某生	31/38	22/33	24/33	3/33

可見由高中教師命題的模擬考試題與由大學教授命題的這次聯考試題，在性質上有顯著的差異。更明確地說，高中教師的命題多是難度不低的陳舊成題，而這次的聯考試題強調思維而非操作熟練。畢竟大學聯考是要甄選出有思維能力的學生，而非高薪的作業員而已。我們之所以不希望在如大學入學考試這種關鍵性且時間又短的考試中，出現太多「難度不低的陳舊成題」，最主要是因爲眞正肯思考的學生不容易在短時間內想出解答;考試時間若更加充份的話，就算是成題也仍然難不倒肯思考的學生。以撰寫以上兩組數學試題解答的學生爲例，他做自然組解答所得的成績就遠高於社會組的成績。相反地，在今年社會組數學考試中獲取高分的學生，作者猜想兩年後能再考得同樣或更高成績的恐怕不多；原因就在肯思考的學生能確實掌握基本材料，內化爲自身的智慧，而不是憑一時的操作熟練與記憶。另一方面，由於目前高中必修課程所占的時數過多，常規題目固然需要練習，但過多的常規練習卻會迫使學生減少花在思考、理解上的時間，反而與教育的目的背道而馳。

「命題」這一件工作，在教育過程中是有極重要的地位的。作者個人認爲，如果要瞭解一位教師的學力，不妨請他出一份試題，並請他開幾本與專業課程有關的參考書單;若再請他開幾本適合任教學生閱讀、非教師的專業課程方面的書刊，則更能認識這位教師。因爲教師在命題時必須對整個教材的難易程度、旁徵博引、主旨要義有徹底的瞭解，才能命出一份好題目。另一方面，一位優良的教師，平時如努力進修，則對於其所授課程的相關知識，必然不遺餘力地去消化吸收，自然參考書籍就看得多；所開出來的書單，也就包羅很廣，同時確切實用。

最後想提出的問題是，像大學聯考這樣規模龐大、時間又短的大型考試，命題先生能否命出可評量考生對高中數學的整體結構性認識的試題？在今天這個強調整合學科間與學科內知識體系、瞭解事物間與事物內整體關連的時代，希望這個問題能帶給大考中心一個新的挑戰。

作者個人認爲，這三年來社會組試題似乎少了一些基本得分題，若有基本得分題（例如計算較爲簡易的思考性題目，而非陳舊的成題），對於鼓勵社會組考生在高中時認眞念數學肯定會起作用，對於數學教育的普及才有正面價值。社會組數學的考題應該凸顯社會組考生眞正需要用到的數學知識，不但能甄選出適合接受大學教育的考生，而且也能讓社會組考生明白將來進入大學以後眞正需要用到的數學有哪些。作者有個想法，就是未來的非自然組數學入學考試試題，大學考試中心是否可以考慮聘請大學商學院教授參與命題工作？

（下轉第67頁）