

# 1995年第26屆國際物理 奧林匹亞競賽試題

中華民國參加第26屆國際物理奧林匹亞競賽代表團

## 理論第一題：重力紅位移及星球質量之量度

(a) (3分)

一頻率為  $f$  之光子具有一等效靜止慣性質量，此慣性質量由光子之能量決定。我們可以假設此光子的重力質量即等於此慣性質量。因此，自星球表面上發射出的光子，在脫離星球的重力場時，其能量將會減少。試證：當一光子自星球表面逃脫至無窮遠時，其頻率之改變量  $\Delta f$ ，在  $\Delta f \ll f$  之情況下，可由下式得出：

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{GM}{Rc^2}$$

其中  $G$  = 重力常數

$R$  = 星球之半徑

$c$  = 光速

$M$  = 星球之質量

利用上式，從距離星球很遠的地點，測量一已知光譜線的重力紅位移，即可用以測知  $M/R$  之比值，如果知道  $R$  即可決定星球之質量  $M$ 。

(b) (12分)

在某一實驗中，一無人太空船被發射用以測量我們所在銀河系中的一星球之質量  $M$  及其半徑  $R$ ，當太空船沿徑向接近其目標時，在星球表面的  $\text{He}^+$  所發射之光子被太空船中的測試室所偵測。偵測之方法是讓測試室中之  $\text{He}^+$  射束中的氦離子產生共振吸收。只有當測試室中之  $\text{He}^+$  被給予一射向星球之速度，其效應剛好可以產生同樣大小之重力紅位移時，這樣的共振吸收才能發生。當太空船內的  $\text{He}^+$  發生共振吸收時， $\text{He}^+$  的速度 ( $v = \beta c$ ) 與其距星球表面的 (最近) 距離  $d$  之間的關係可以被測知，所得的實驗數據列在下表中。請充份利用此表中之數據，以圖解方法決定星球之質量  $M$  及半徑  $R$ ，不必估算你答案中之誤差。

共振條件發生時之實驗數據

速度參數	$\beta = \frac{v}{c}$ ( $10^{-5}$ )	3.352	3.279	3.195	3.077	2.955
與星球表面之距離	$d$ ( $10^8$ m)	38.90	19.98	13.32	8.99	6.67

(c)用上述實驗決定R及M時，通常我們必須將發射光子的原子，因反衝所產生對光子頻率的改變考慮在內（原子熱運動會使發射出的光譜線變寬，但譜線光強分布的極大位置並無移動。因此我們可以假設所有的熱效應皆已考慮在內）。試回答：

(i) (4分)

以E表示當原子處於靜止狀態時，兩個能階間的能量差，今假設原為靜止狀態的原子發射一個光子後產生反衝，試求光子能量， $hf$ ，的相對論性表示式，以E和該原子的起始靜止質量表示之。

(ii) (1分)

以數值估計氦離子 $\text{He}^+$ 因反衝所產生之相對論性頻率位移， $(\frac{\Delta f}{f})_{\text{反衝}}$ 。

你的答案應該比(b)部分所得到的重力紅位移小很多。

已知：光速  $c = 3.0 \times 10^8$  m/s

He的靜止質量  $m_0 c^2 = 4 \times 938$  (MeV)

波耳能量  $E_n = \frac{-13.6 z^2}{n^2}$  eV

重力常數  $G = 6.7 \times 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup> kg<sup>-2</sup>

## 理論第二題：聲波的傳播

簡介：

在海洋中聲波傳播的速率是隨深度、溫度及含鹽濃度而變化的，圖2(a)所示為聲速 $c$ 隨海水深度 $z$ 而變化的情形，圖中最小速率 $c_0$ 發生在海洋表面與海底之間的某深度。為方便計，取速率最小的深度處為 $z = 0$ ，海洋表面處為 $z = z_s$ 及海底處為 $z = -z_b$ 。在 $z = 0$ 面之上，聲速 $c$ 可表示如下：

$$c = c_0 + bz$$

在  $z = 0$  面之下， $c$  如下所示：

$$c = c_0 - bz$$

在上述二式中， $b = \left| \frac{dc}{dz} \right|$ ，亦即  $b$  為聲速隨深度的變化率；假設  $b$  為常數。

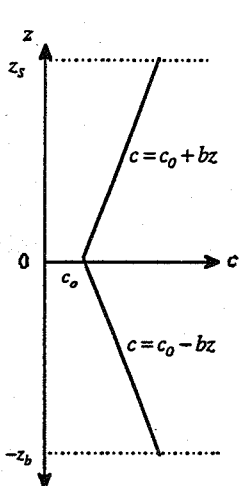


圖2(a)

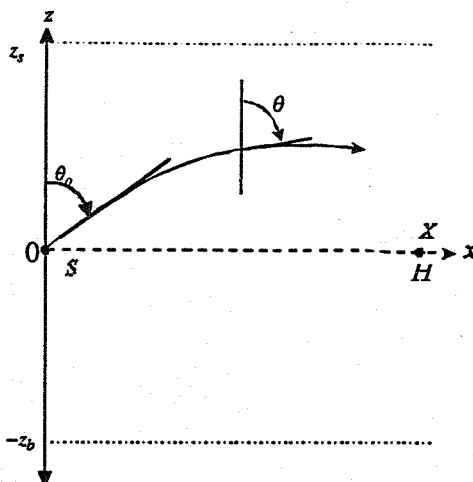


圖2(b)

圖 2 (b) 為聲波在海洋中  $z$ - $x$  平面上進行的一段軌跡， $x$  表水平方向。在  $z$ - $x$  軌跡中所有各點的聲速  $c(z)$  均如圖 2 (a) 所示。一聲源  $S$  置於  $z = 0$ ， $x = 0$  的位置上。由此聲源發出之聲波中一部分形成最初射出角為  $\theta_0$  之波束，如圖 2 (b) 所示，因為聲波速率隨  $z$  而變化，故聲波將被折射，所以  $\theta$  角將沿聲波軌跡而改變。

(a) (6 分)

證明在聲波離開聲源  $S$  後，其在  $z$ - $x$  面上的起始軌跡，是以  $R$  為半徑的圓弧，即

$$R = \frac{c_0}{b \sin \theta_0}, \quad \text{其中 } 0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$$

(b) (3 分)

試導出一公式包含  $z_s$ 、 $c_0$  及  $b$ ，以表示聲波向上傳遞中完全不會由海面反射時的最小角度  $\theta_0$ 。

(c) (4 分)

圖 2 (b) 中 H 表示一放置在  $z = 0$ ,  $x = X$  的聲波接收器。試導出一包含  $b$ 、 $X$  及  $c_0$  的公式，用以表示聲波束由 S 到達 H 的一系列角度  $\theta_0$ 。假設  $z_s$  及  $z_0$  夠大，以致聲波由水面及水底反射的情況不會發生。

(d) (2 分)

在下述條件下，計算聲波束從 S 到達 H 的四個最小的最初射出角  $\theta_0$ 。

$$X = 10,000 \text{ m}$$

$$c_0 = 1,500 \text{ m/s}$$

$$b = 0.02000 \text{ s}^{-1}$$

(e) (5 分)

當聲波以(c)中所得之最小角度  $\theta_0$  射出時，試導出一公式用以表示由 S 到 H 所需時間，並用(d)中所給的數值計算此時間，下列公式可能是有幫助的

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right)$$

此外，計算當聲波由 S 到 H 沿  $z = 0$  傳遞時所需的時間。又下述兩種情況： $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

或在(d)中所得之最小  $\theta_0$  值時，那一種情況需時較短？

### 理論第三題：圓柱浮體

(a) (3 分)

一浮體是由一均勻質輕的實心圓柱體與一均勻細桿銜接而成，細桿直接銜接於圓柱體底部沿長度方向的正中央處，其側視圖如圖 3 (a) 所示。圓柱體的半徑為  $a$ ，長度為  $l$ ，密度為  $d$ 。細桿的質量與圓柱體質量相同，其長度恰等於圓柱體的直徑，且細桿的密度大於海水的密度。此浮體浮於密度為  $\rho$  的海水中，在平衡時，試導出圖 3 (a) 中所示的浮角  $\alpha$  與  $d/\rho$  間的關係式，細桿的體積可以完全忽略。

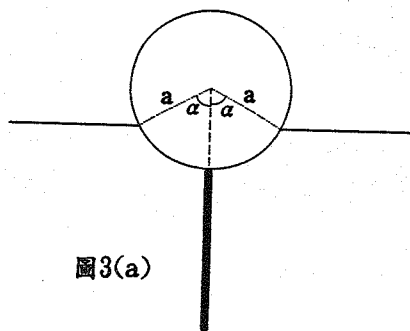


圖 3(a)

量相同，其長度恰等於圓柱體的直徑，且細桿的密度大於海水的密度。此浮體浮於密度為  $\rho$  的海水中，在平衡時，試導出圖 3 (a) 中所示的浮角  $\alpha$  與  $d/\rho$  間的關係式，細桿的體積可以完全忽略。

(b) (4 分)

設處於平衡狀態的浮體受到某種擾動，而相對於平衡位置，鉛直向下作一小位移  $z$  (

如圖 3 (b) 所示 )，此時浮體會受到一向上的淨力，使它相對於平衡位置作上下振動。試用  $\alpha$ 、 $g$  ( 重力加速度 )，及  $a$  表示此鉛直上下振動的頻率。在求頻率的過程中，假設水之動盪對浮體運動的影響只是將浮

體的等效質量增加  $\frac{1}{3}$  倍。你可假設  $\alpha$  不是很小。

(c) ( 8 分 )

今假定浮體繞圓柱體之水平中心軸線擺動，如圖 3 (c) 所示。試求浮體來回擺動之頻率，以  $g$  及  $a$  表示之。假定水之動盪及黏滯性效應均可略去不計，浮體來回擺動的角度可設為很小。

(d) ( 5 分 )

該浮體裝置有靈敏的加速度計，可用以測量垂直運動和擺動，並且可將測得的資料以無線電方式傳送至岸上。在海水相當平靜時，測得垂直振動的週期約為 1 秒，擺動的週期約為 1.5 秒。根據這些資料，試證明浮角  $\alpha$  約為  $90^\circ$ ，並且估計圓柱體的半徑和浮體的總質量 ( 假定圓柱體的長度  $l$  等於  $a$  )。

( 你可取  $\rho \cong 1000 \text{ kg m}^{-3}$ ， $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$  )

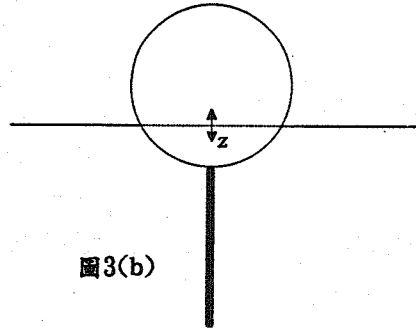


圖 3(b)

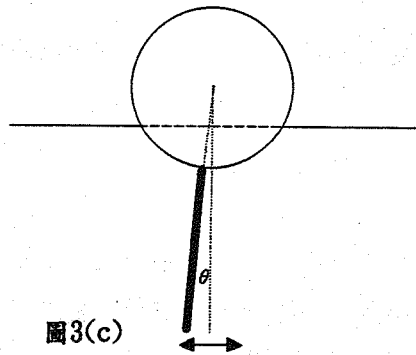


圖 3(c)

### 實驗題一：在黏滯性液體中的終端速度

一物體在液體中掉落時終將達到一不變的速度，稱為終端速度。本實驗的目的是測量各種物體在甘油中落下時的終端速度。

半徑為  $r$  的球體以  $v$  的速度在具黏滯性液體中落下時，所受的黏滯阻力為  $F = 6 \pi \eta r v$ 。式中  $\eta$  稱為黏滯係數，它是液體的一種特性，在這個實驗中，你將測量各種圓柱狀金屬的終端速度 ( 因為圓柱狀物體比球狀物體容易製作 )。每一圓柱體的直徑均等於它的長度，而且我們將假設此種圓柱體所受的黏滯阻力與相同直徑， $2r$ ，的球體相似，並以下式表示之：

$$F_{\text{圓柱體}} = 6 \pi k \eta r^m v$$

如為球體的情況下，則其中的  $k = 1$ ， $m = 1$ 。

預備步驟：計算終端速度（2分）

如果  $\rho$  表示圓柱體的密度， $\rho'$  表示液體的密度，試證明圓柱體的終端速度  $v_T$  為

$$v_T = Cr^{3-m}(\rho - \rho')$$

式中的  $C$  為一常數，請導出  $C$  的表示式。

實驗：

利用所提供的儀器，決定指數  $m$  的數值（10分）和甘油的密度（8分）。

注意：

- 為求一致，你應設法讓圓柱體以同樣之方位落下，亦即保持圓柱體之中心軸線在水平方向。
- 圓柱體直徑及長度之誤差範圍為 0.05 mm（你自己不必去測量這些數值）。
- 容器內有一黃銅製的杓子，是供你取回金屬圓柱體用的。

注意：將圓柱體投入甘油前，你必須確定把杓子放在適當的位置，否則你將無法取回圓柱體進行重複之測量。

- 甘油會因吸收空氣中之水汽而降低其黏滯性，請在不用時以所給之塑膠膜將甘油量筒蓋住。
- 實驗後不要將不同大小及不同質料之圓柱體弄混亂。

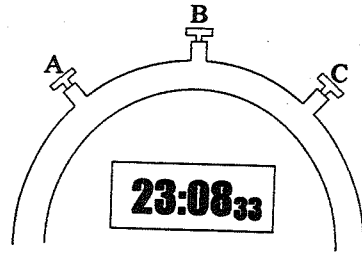
材 料	密度 ( $\text{kg m}^{-3}$ )
鋁 ( Aluminum )	$2.70 \times 10^3$
鈦 ( Titanium )	$4.54 \times 10^3$
不銹鋼 ( Stainless steel )	$7.87 \times 10^3$
銅 ( Copper )	$8.96 \times 10^3$

器材：

- |                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| 1 個 1000 ml 裝有甘油之量筒。 | 1 個杓子，用以接取金屬圓柱體。     |
| 1 瓶甘油，用以將量筒加滿。       | 1 對鑷子。               |
| 1 只電子停錶。             | 6 個 10.00 mm 直徑鋁圓柱體。 |
| 1 支 30 cm 的尺。        | 6 個 8.00 mm 直徑鋁圓柱體。  |
| 1 個衣夾。               | 6 個 5.00 mm 直徑鋁圓柱體。  |

- 6個4.00 mm直徑鋁圓柱體。
  - 6個4.00 mm直徑鈦圓柱體。
  - 6個4.00 mm直徑不銹鋼圓柱體。
  - 6個4.00 mm直徑銅圓柱體。
- 線性及對數 - 對數座標紙。

## 電子停錶的操作方法



### 測量時間間隔

- 起動停錶：按C鈕（在停錶的右邊）
- 停止停錶：再按一次C鈕，注意顯示的時間間隔
- 停錶歸零：按A鈕（在停錶左邊）

若你所用的停錶有任何問題

※假若你意外的按到A鈕而使停錶停止

- 再按一次A鈕（使停錶重新起動）
- 按C鈕（停止停錶）
- 按A鈕（停錶歸零）

※假如你意外地按到B鈕（功能選擇鈕），以致停錶轉到TIME、SET TIME或SET ALARM等模式：

- 按B鈕直到錶顯示“STOP WATCH”模式（錶中之顯示不變，但最右邊之數位，即每秒之1/100數位跳得很快）

假若依照上面的指示，仍然無法操作或你遭遇其他有關停錶的困難，請告訴監試人員。

## 實驗題二：雷射光的繞射與散射

（切勿直接注視雷射光束，它可能傷害你的視力。）

本實驗的目的是利用從二極體雷射光源發出的可見輻射光，顯示並量化光的反射、繞射及散射。金屬尺被用來當作光柵，裝水及稀牛奶的塑膠盒被用來呈現光的反射與散射的現象。

第一部分：（8分）

將所提供的一根150 mm金屬尺妥當放置，使其光滑面大約垂直於入射的雷射光束，並且使雷射光能照射到金屬尺上的數個刻度。由於繞射現象，你可以在所提供的白紙屏

上觀察到數個“亮紋”。

使光屏與金屬尺相距約1.5 m，測量這些亮紋的位置與間距，並且繪出所用儀器的整體幾何配置圖。

利用下列的關係式

$$N \lambda = \pm h \sin [\beta]$$

式中 N 為繞射級

$\lambda$  為輻射光的波長

h 為柵線的間距

$\beta$  為繞射角

根據你所測得的資料，算出雷射光的波長並估計其實驗誤差。

第二部分：(2分)

現在將所提供的空塑膠盒置於雷射光源和白紙屏之間，並使雷射光束近乎垂直地射入此盒子。

- (i) 觀察射出光束的光強如何減弱並估計光強減弱的百分比，數個已校正的濾光片可用來幫助你的估計。已知人類眼睛對光的感受是呈對數性的。

光強減弱的原因主要來自於空氣 / 塑膠界面的反射損失。在本題情況中，全部共有四個界面。在每個界面上垂直入射的反射係數R，即反射光強與入射光強之比，可以用下式表示：

$$R = \left\{ \frac{(n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)} \right\}^2$$

式中  $n_1$  及  $n_2$  分別為界面前後介質的折射率。假設塑膠盒對光的吸收為零，穿透係數T則為

$$T = 1 - R$$

- (ii) 假設塑膠的折射率為1.59，且忽略光多次反射與同調性的效應影響，計算空塑膠盒對光的穿透係數，並與(i)的估計結果相互比較。

第三部分：(1分)

不要移動塑膠盒，將50 ml的水從燒杯倒入此塑膠盒，重複第二部分的觀察與計算。假設水的折射率為1.33。

第四部分：(9分)

- (i) 把0.5 ml (12滴)的牛奶(做為散射物質)加入已裝有50 ml水的塑膠盒內，並充分攪拌。盡可能精確的測量雷射光被散射後散開的總角度，以及在塑膠盒射



出面上的光束直徑，注意這兩個量是相關的。同時如同前面的實驗一樣估計射出雷射光強的減低量。

- (i) 再加入 0.5 ml 的牛奶於(i)部分的塑膠盒內，重複(i)所要求的測量。
- (ii) 重複(ii)的實驗直到透射出的雷射光非常微弱或完全看不到為止。
- (iv) 決定散射總角度和塑膠盒內牛奶濃度的關係。
- (v) 利用你的結果及下列的關係式

$$I = I_0 \{ e^{-\mu z} \} = T_{\text{牛奶}} \cdot I_0$$

估計當散射物質濃度為 10 % 時的  $\mu$  值。

式中  $I_0$  為入射的光強度

$I$  為射出的光強度

$z$  為在塑膠盒內的光程

$\mu$  為衰減係數，即等於 (常數  $\times$  散射物質的濃度)

$T_{\text{牛奶}}$  為牛奶的穿透係數

### 實驗器材

你可能不需要用到所有的器材

二極體雷射光源

金屬尺，做為繞射光柵之用

塑膠盒，內可盛入水和牛奶，用以觀察反射及散射現象

捲尺

白紙屏

發散透鏡

會聚透鏡

量角器

濾光片

燒杯及滴管

攪拌器

線性 - 線性及對數 - 線性座標紙

★