

費曼怪數趣論

高欽蓮

高雄市大同國民小學

83年4月16日的聯合報副刊，發表一篇文章：成功湖邊散記之四——令人失眠的數，作者是陳之藩教授。文中呼籲學過除法的中小學生，也能提筆共同參與，一齊來瞧瞧費曼怪數 $\frac{1}{243} = 0.004115226337448559 \dots$ ，到底有無何玄機在？身為基礎科學教育工作者的我們，自然不能缺席，否則自己都欠缺研習科學的正確態度和精神，又如何以身作則呢？

在文中，說明此怪數是廖約克博士尊師費曼先生所摘錄，約克博士也察覺出除數243是3的五次方，而這乘方特性正是我們解答此問題的依據也。

凡是學過乘方的人，一定就能體會 $\frac{1}{243}$ 也就等於1被3連除5次，我們就是分步除之，整理出的結果如下：

$$\frac{1}{3} = 0.3333 \dots = 0.\bar{3}$$

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = \frac{\frac{1}{3}}{3} = \frac{0.\bar{3}}{3} = \frac{0.333 \dots}{3} = 0.111 \dots = 0.\bar{1}$$

$$\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = \frac{\frac{1}{3^2}}{3} = \frac{0.\bar{1}}{3} = \frac{0.111 \dots}{3} = 0.037037037 \dots = 0.\overline{037}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{81} &= \frac{1}{3^4} = \frac{\frac{1}{3^3}}{3} = \frac{0.\overline{037}}{3} = \frac{0.037037037 \dots}{3} = 0.012345679012345679 \dots \\ &= 0.\overline{012345679} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{243} &= \frac{1}{3^5} = \frac{\frac{1}{3^4}}{3} = \frac{0.\overline{012345679}}{3} = \frac{0.012345679012345679 \dots}{3} \\ &= 0.\overline{004115226337448559670781893} \end{aligned}$$

因此我們找出了 $\frac{1}{243}$ 之值為一循環節 27 位數之循環小數，同時所花之時間並不長，計算也不繁雜，我們很高興。

我們仔細有條理的整理歸納，又發現下列特性：

1. $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}, \frac{1}{3^5}$ 的循環節數字之位數分別為 $3^0, 3^0, 3^1, 3^2, 3^3$ 即可得

$n \geq 2$ 時， $\frac{1}{3^n}$ 其商為一循環小數，循環節位數為 3^{n-2} 位。

2. $\frac{1}{81} = 0.\overline{012345679}$ 而 $0,\overbrace{1}^{+1},\overbrace{2}^{+1},\overbrace{3}^{+1},\overbrace{4}^{+1},\overbrace{5}^{+1},\overbrace{6}^{+1},\overbrace{7}^{+1},\overbrace{9}^{+2}$

$\frac{1}{243} = 0.\overline{004115226337448559670781893}$

而 $004,\overbrace{115}^{+111},\overbrace{226}^{+111},\overbrace{337}^{+111},\overbrace{448}^{+111},\overbrace{559}^{+111},\overbrace{670}^{+111},\overbrace{781}^{+111},\overbrace{893}^{+112}$

即 $\frac{1}{3^n}$ ， $n \geq 4$ 時，將其循環節位數依序區分九份，則每份位數為 3^{n-4} 位，且自左而右依 3^{n-4} 個 1 而等量增加（換言之為等差數列），惟最後一間隔（即第八間隔）之個位數加 1。

因此我們可以預測 $\frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$ 之商為循環節 81 位數，其等差數列之公差值為

111、111、111，惟第八間隔之差值為 111、111、112，你們相信嗎？請看其商：

$\frac{1}{729} = 0.\overline{001371742,112482853,223593964,334705075,445816186,556927297,668038408,779149519,890260631}$ 。

果然與預測相符合，完全符合！費曼怪數，怪得有道理，它以局部明顯的特性來引有緣人，怎會讓費曼大師抱恨？不應讓費曼大師抱恨的。 ★