中華民國參加1995年第36屆
國際數學奧林匹亞競賽
選訓模擬競試試題及參考解答

中華民國數學奧林匹亞委員會

一、引　言

中華民國選拔參加一九九五年第三十六屆於七月十三～二十五日在加拿大多倫多舉行之國際數學奧林匹亞競賽的活動，已在中華民國數學奧林匹亞委員會主辦及中華民國數學會、國立臺灣師範大學協辦下，於四月十一～十九日在國立臺灣師範大學理學院完成了選拔工作，順利產生了六位正代表及二位候補代表。在選訓營期間共舉辦了三次模擬競試、十七個專題探討、十一個主題共 22 道問題的獨立研究，而三次模擬競試每次佔選拔成績的 25 %共佔 75 %，比例最高。獨立研究解題評分成績則佔 15 %；以下針對三次模擬競試提出解答，並在附錄中列出十一個主題的 22 道獨立研究題，供輔導數學資優教學的參考。

二、中華民國參加1995年國際數學奧林匹亞競賽選訓營模擬競試試題

模擬競試(一)

編號：＿＿＿＿＿＿　　　　日期：4 月 13 日

注意事項：(1)本試卷共 3 題：每題35分　(2)答卷時間共4.5 小時　(3)不可使用計算器

問題一、對任意給定的整數數列：$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ 作出第二個整數數列：

$|x_2-x_1|, |x_3-x_2|, |x_4-x_3|, |x_5-x_4|, |x_6-x_5|, |x_7-x_6|, |x_8-x_7|, |x_1-x_8|$，這個過程稱為“一次操作”。試確定那些 8 項的整數數列經過有限次操作後可得到 8 項都相等的整數數列。

問題二、設 P 為 $\triangle A_1A_2A_3$ 的外接圓上任一點。若 P 至直線 A_2A_3，A_3A_1，A_1A_2 的垂足分別為 B_1，B_2，B_3，已知 B_1，B_2，B_3 三點共線。

試證：若 H 是 $\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心，則直線 $B_1B_2B_3$ 過 $\overline{PH}$ 的中點。

問題三、設 a,b,c,d 爲整數且滿足

(1) a 與 b 互質。

(2) c 與 d 互質。

(3) $ad-bc=k>0$。

試證：恰好有 k 組實數序對 (x_1,x_2) 滿足 $0\leqslant x_1,x_2<1$ 且 ax_1+bx_2 與 cx_1+dx_2 皆爲整數。

模擬競試(二)

編號：__________ 時間：4 月 15 日

注意事項：(1)本試卷共3題：每題35分 (2)答卷時間共4.5小時 (3)不可使用計算器

問題四、已知 S_1，S_2 兩圓外切於點 F，S_1，S_2 的一條外公切線分別切 S_1 圓及 S_2 圓於點 A 及點 B。L 爲平行於 $\overline{AB}$ 且切 S_2 圓於點 C 而交 S_1 圓於 D，E 兩點的直線。試證△ ABC 與△ BDE 的外接圓之公弦通過點 F。

問題五、設 $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n$ 爲複數係數的多項式，其根爲 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，其中 $|\alpha_1|>1$，$|\alpha_2|>1$，…，$|\alpha_j|>1$ 而 $|\alpha_{j+1}|\leqslant 1$，…，$|\alpha_n|\leqslant 1$。

試證：

$$\prod_{i=1}^{j}|\alpha_i|\leqslant\sqrt{|a_0|^2+|a_1|^2+\cdots+|a_{n-1}|^2+1}.$$

問題六、n 個人在一起聚會，其中每個人都恰好認識 8 個人。已知每兩個互相認識的人都恰好共同認識 4 個人，而且每兩個互相不認識的人都恰好共同認識 2 個人。試確定 n 的值。

模擬競試(三)

編號：__________ 時間：4 月 17 日

注意事項：(1)本試卷共3題：每題35分 (2)答卷時間共4.5小時 (3)不可使用計算器

問題七、給定任意自然數 n 及 n 個相異的整數 m_1，m_2，…，m_n。

證明：存在一個整係數 n 次多項式 $f(x)$ 滿足以下兩個條件：

(i)對所有的整數 m_i $(1\leqslant i\leqslant n)$，$f(m_i)=-1$。

(ii) $f(x)$ 不可能被分解爲兩個次數大於 0 的整係數多項式的乘積。

問題八、設有一六邊形內接於半徑爲 r 的圓，且知此六邊形有兩邊長爲 k，兩邊長爲 $2k$，另兩邊長爲 $3k$。試證：$2r^3-7k^2r-3k^3=0$ 且 $2k<r<3k$。

問題九、假設 $f(x,y)=y^2+ax^{2n}+b_1x^{2n-1}y+\cdots+b_{2n-1}xy^{2n-1}+b_{2n}y^{2n}$，

其中 n 爲大於1的自然數，a 爲正實數，$b_1,b_2,\cdots,b_{2n}$ 爲實數。

試證：可以找到一個正實數 r 使得當 $0<x^2+y^2<r^2$ 時，$f(x,y)$ 恆爲正數。

三、模擬試題參考解答

問題一：（台師大數學系陳昭地教授提供）

［解］所有的整數值組成的8項數列都符合所求。將每一整數依其奇偶分別以 -1 表示奇數，1表示偶數。若給定 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6、x_7、x_8 8項數列，依上述奇偶性方式表達成 X_1、X_2、X_3、X_4、X_5、X_6、X_7、X_8，因｜偶－偶｜及｜奇－奇｜爲偶，｜奇－偶｜及｜偶－奇｜爲奇，故8項數列之奇偶性經第一次操作後成爲 $X_1X_2, X_2X_3, X_3X_4, X_4X_5, X_5X_6, X_6X_7, X_7X_8, X_8X_1$，經第二次操作後之奇偶性成爲 $X_1X_2^2X_3, X_2X_3^2X_4, X_3X_4^2X_5, \cdots\cdots, X_8X_1^2X_2$；$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$；經第七次操作後之奇偶性成爲 $X_1X_2^7X_3^{21}X_4^{35}X_5^{35}X_6^{21}X_7^7X_8, \cdots\cdots\cdots, \cdots\cdots\cdots,$ $X_8^1X_1^7X_2^{21}X_3^{35}X_4^{35}X_5^{21}X_6^7X_7^1$ 即 $X_1X_2X_3X_4X_5X_6X_7X_8, \cdots\cdots\cdots, \cdots\cdots\cdots,$ $X_1X_2X_3X_4X_5X_6X_7X_8$，故第八次操作後，成爲每項都是偶數的整數列（提出2的因子後，得到“嚴格遞減”的新的8項數列）因任意8項數列經一次操作後皆爲非負整數，故僅須考慮8項非負整數數列之情況，而8個非負整數之最大數經一次操作後皆爲非遞增之狀態。

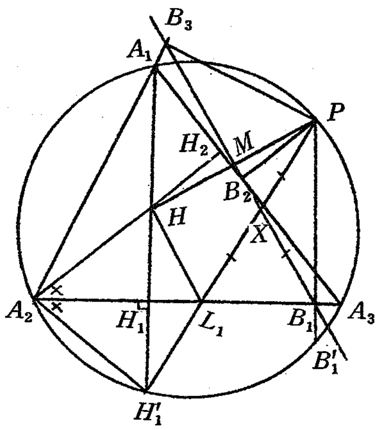
但任意給定8項非負數列，經8次操作後爲8項非負偶數數列 $\{2y_1,2y_2,2y_3,2y_4,2y_5,2y_6,2y_7,2y_8\}$ 此時其問題與 $\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6,y_7,y_8\}$ 之情況一樣，但

$$\max\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6,y_7,y_8\}=\frac{1}{2}\max\{2y_1,2y_2,2y_3,2y_4,2y_5,2y_6,2y_7,2y_8\}$$

故每8次操作至少可將原數列之最大數考慮成減半的情形，於是經有限次操作必可達到每項都是0的情形，此即問題中項項同值的情形，得證。

問題二：（台師大數學系趙文敏教授提供）

［解1］綜合法



(1) 因爲$\angle PB_1A_3=\angle PB_2A_3=90°$，
所以，P, A_3, B_1, B_2共圓。
於是，$\angle PB_2B_1=180°-\angle PA_3A_2$。
同理，可得$\angle PB_2B_3=\angle PA_1B_3$。
因爲P, A_1, A_2, A_3共圓，
所以，$\angle PA_3A_2=\angle PA_1B_3$
於是，$\angle PB_2B_1+\angle PB_2B_3=180°$，
B_2, B_3共線。

(2) 延長$\overline{A_1H}$交$\overline{A_2A_3}$於H_1，交外接圓於H_1'。連$\overline{PH_1'}$交$\overline{A_2A_3}$於L_1，交Simson線於X。
因爲P, A_3, B_1, B_2共圓，所以，$\angle PB_1B_2=\angle PA_3B_2=\angle PH_1'A_1=\angle H_1'PB_1$。於是，$\triangle XPB_1$是等腰三角形，$\overline{PX}=\overline{B_1X}$。進一步地，在直角三角形$\triangle PB_1L_1$中，$X$是斜邊$\overline{PL_1}$的中點。另一方面，因爲$H_1', A_1, A_2, A_3$共圓，所以，$\angle H_1'A_2A_3=\angle H_1A_1A_3$。因爲$\overline{A_1H_1}$與$\overline{A_2H_2}$都是高。所以，$\angle A_3A_2H_2=\angle A_3A_1H_1=90°-\angle A_3$。於是，$\angle H_1'A_2A_3=\angle A_3A_2H_2$。由此可知：$\triangle H_1A_2H_1'\cong\triangle H_1A_2H$，$\overline{HH_1}=\overline{H_1H_1'}$。進一步得$\angle HL_1H_1=\angle H_1L_1H_1'=\angle PL_1B_1=\angle XB_1L_1$，於是，$\overline{HL_1}\mathbin{/\mkern-5mu/}\overline{B_1X}$。在$\triangle PHL_1$中，$X$是$\overline{PL_1}$的中點，直線$B_1X\mathbin{/\mkern-5mu/}\overline{HL_1}$，所以，直線$B_1X$(即Simson線)必通過$\overline{PH}$的中點$M$。

［解2］複數法

(1) 設$\triangle A_1A_2A_3$的外接圓爲單位圓，A_1, A_2, A_3的複坐標分別爲t_1, t_2, t_3，P的複坐標爲t，令$s_1=t_1+t_2+t_3$，$s_2=t_2t_3+t_3t_1+t_1t_2$，$s_3=t_1t_2t_3$
直線A_2A_3的複方程式爲 $z+t_2t_3\bar{z}=t_2+t_3$ $(\,|t_2|=|t_3|=1\,)$

過P而與A_2A_3的直線的複方程式爲 $z-t_2t_3\bar{z}=t-\dfrac{t_2t_3}{t}$ $(\because |t|=1)$

聯立求解，即得交點B_1的複坐標z_1爲

$$z_1=\frac{1}{2}\left(t+t_2+t_3-\frac{t_2t_3}{t}\right)=\frac{1}{2}(t+s_1)-\frac{1}{2}\left(t_1+\frac{s_3}{t_1t}\right)$$

$$\bar{z}_1=\frac{1}{2}(\bar{t}+\bar{s}_1)-\frac{1}{2}\left(\bar{t}_1+\frac{\bar{s}_3}{\bar{t}_1\bar{t}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+\frac{s_2}{s_3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{t_1t}{s_3}\right)$$

於是，$tz_1-s_3\bar{z}_1=\frac{1}{2}(t^2+s_1t-s_2-\frac{s_3}{t})=\frac{1}{2t}(t^3+s_1t^2-s_2t-s_3)$

換言之，點 B_1 在直線 $tz-s_3\bar{z}=\frac{1}{2t}(t^3+s_1t^2-s_2t-s_3)$ 上。

因爲此方程式的係數對 t_1, t_2, t_3 成對稱，所以，B_2, B_3 也在此直線上。

(2) 垂心H的複坐標爲 $t_1+t_2+t_3=s_1$，因此，PH的中點M的複坐標爲$\frac{1}{2}(s_1+t)$

$$t(\frac{1}{2}(s_1+t))-s_3(\frac{1}{2}(\bar{s}_1+\bar{t}))=\frac{1}{2}(s_1t+t^2)-\frac{1}{2}(s_3\cdot\frac{s_2}{s_3}+\frac{s_3}{t})$$

$$=\frac{1}{2t}(t^3+s_1t-s_2t-s_3)$$

得知點M在Simson線上。

問題三：

[解1] 首先假設(x_1, x_2)爲一組所需要的數對。因爲 ax_1+bx_2 和 cx_1+dx_2 皆爲整數，因此 $kx_1=(ad-bc)x_1=d(ax_1+bx_2)-b(cx_1+dx_2)$ 亦爲一整數。

由於 $0\leqslant x_1<1$，x_1可寫成 $x_1=\frac{y_1}{k}$，其中 $0\leqslant y_1<k$ 爲一整數。同理，x_2 亦可寫成 $x_2=\frac{y_2}{k}$，其中 $0\leqslant y_2<k$ 爲一整數。

令 $-c=sk+c_1$ 且 $d=rk+d_1$，其中 r, s, c_1 和 d_1 皆爲整數且 $0\leqslant c_1, d_1<k$ 因爲 $ad-bc=k$，故

$$a\frac{d_1}{k}+b\frac{c_1}{k}=\frac{1}{k}(ad_1+bc_1)=\frac{1}{k}(a(d-rk)+b(-c-sk))$$

$$=\frac{1}{k}((ad-bc)+k(-ar-bs))$$

$$=1-ar-bs$$

爲一整數。同時

$$c\frac{d_1}{k}+d\frac{c_1}{k}=\frac{1}{k}(c(d-rk)+d(-c-sk)$$

$$=-cr-ds$$

亦爲一整數。因此，$(\frac{d_1}{k},\frac{c_1}{k})$爲一所需之數對。因爲 c,d 互質，因此，若 $p>1$ 爲 c_1 和 d_1 的公因數，則 p 和 k 互質。

令 $u_0=0=v_0$ 且對於任意整數 $0<n<k$，令 $nd_1=r_nk+u_n$ 和 $nc_1=s_nk+v_n$ 其中 r_n,s_n,u_n 和 v_n 皆爲整數且 $0\leqslant u_n,v_n<k$。很顯然地，任意數對 (u_n,v_n)，$0\leqslant n<k$，皆滿足所需的條件。令 $0\leqslant i,j<k$ 使得 $u_i=u_j$ 且 $v_i=v_j$ 成立。則 $(i-j)d_1=(r_i-r_j)k$ 且 $(i-j)c_1=(s_i-s_j)k$。因爲 c 和 d 互質，k 之任意不爲 ±1 的因數不能同時整除 c_1 和 d_1，故 $i=j$。

因此，此 n 個數對 $(\frac{u_0}{k},\frac{v_0}{k})$，$(\frac{u_1}{k},\frac{v_1}{k})$，…，$(\frac{u_{e-1}}{k},\frac{v_{e-1}}{k})$ 皆相異。此證明了至少有 k 個數對滿足所需的條件。

爲了證明至多有 k 個所需的數對，我們需要以下的性質：因爲 c,d 互質，存在整數 r_0 和 s_0 滿足 $cr_0+ds_0=1$。

$-b+(ar_0+bs_0)d=(cr_0+ds_0)(-b)+(ar_0+bs_0)d=-bcr_0+adr_0=kr_0$

因此，$-b=kr_0-(ar_0+bs_0)d$。同理可得 $a=es_0+(ar_0+bs_0)c$。

現在假設 $(\frac{y_1}{k},\frac{y_2}{k})$ 爲一所需的有序數對。則 $a\frac{y_1}{k}+b\frac{y_2}{k}=r_1$ 爲一整數。

因爲 $ad-bc=k$，$a\frac{dr_1}{k}+b\frac{-cr_1}{k}=r_1$。因此，$a(\frac{y_1-dr_1}{k})+b(\frac{y_2+cr_1}{k})=0$。由於 a,b 互質，存在一整數 s_1 使得 $y_1-dr_1=-bs_1$ 和 $y_2+cr_1=as_1$，即 $y_1=-bs_1+dr_1$，$y_2=as_1-cr_1$。因爲 $-b=kr_0-(ar_0+bs_0)d$ 且 $a=ks_0+(ar_0+bs_0)c$，存在整數 r_2,s_2,l 滿足 $0\leqslant l<k$ 且 $y_1=r_2k+ld$ 和 $y_2=s_2k+lc$。由 u_n 和 v_n 的定義和 $0\leqslant y_1,y_2,u_l,v_l<k$ 知 $y_1=u_l$ 且 $y_2=v_l$，即 $(\frac{y_1}{k},\frac{y_2}{k})=(\frac{u_l}{k},\frac{v_l}{k})$。所以，至多有 k 個有序數對滿足所需的條件。

[解2] 令 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$。因爲 $\det(A)=ad-bc=k>0$ 且 $\gcd(a,b)=1$，存在一整數矩陣 $S=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}$ 使得 $\det(S)=1$ 且

$E=AS=\begin{bmatrix}1 & 0\\ e_{21} & k\end{bmatrix}$，其中 e_{21} 爲一適當選取的整數且 $\gcd(e_{21},k)=1$。

令 $Y=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=S^{-1}X=\begin{bmatrix}s_{22} & -s_{12}\\ -s_{21} & s_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$。

令 U 爲所需之有序數對所形成的集合。因爲 $(0,0)\in U$，U 不爲空集。再令集合 $V=\{(y_1,y_2)\mid 0\leqslant y_1,y_2<1$ 且 y_1 和 $e_{21}y_1+ky_2$ 兩數皆爲整數$\}$。

則 $V=\{(0,\frac{t}{k})\mid 0\leqslant t<k$ 爲一整數$\}$。對於任意 $\overrightarrow{x}=(x_1,x_2)\in U$，令

$0\leqslant y_{x1}$，$y_{x2}<1$ 分別爲 $s_{22}x_1-s_{12}x_2$ 和 $-s_{21}x_1+s_{11}x_2$ 的小數部份；即存在整數 k_{x1} 和 k_{x2} 滿足 $s_{22}x_1-s_{12}x_2=k_{x1}+y_{x1}$ 和 $-s_{21}x_1+s_{11}x_2=k_{x2}+y_{x2}$。定義 $\varphi:U\to V$ 爲 $\varphi(x_1,x_2)=(y_{x_1},y_{x_2})$。若存在 $\overrightarrow{x}=(x_1,x_2)$，$\overrightarrow{u}=(u_1,u_2)\in U$ 滿足 $\varphi(x_1,x_2)=\varphi(u_1,u_2)$ 則存在整數數 r_1,r_2 使得 $s_{22}x_1-s_{12}x_2=s_{22}u_1-s_{12}u_2+r_1$ 且 $-s_{21}x_1+s_{11}x_2=-s_{21}u_1+s_{11}u_2+r_2$；此即

$\begin{bmatrix}s_{22} & -s_{12}\\ -s_{21} & s_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_{22} & -s_{12}\\ -s_{21} & s_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}r_1\\ r_2\end{bmatrix}$。因此

$\begin{bmatrix}x_1-u_1\\ x_2-u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_{11} & s_{12}\\ s_{21} & s_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_1\\ r_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_{11}r_1+s_{12}r_2\\ s_{21}r_1+s_{22}r_2\end{bmatrix}$。因爲

$s_{11},s_{12},s_{21},s_{22},r_1,r_2$ 皆爲整數，x_1-u_1 和 x_2-u_2 皆爲整數。又由 $0\leqslant x_1,x_2,u_1,u_2<1$ 得到 $x_1-u_1=0$ 且 $x_2-u_2=0$；此即 $(x_1,x_2)=(u_1,u_2)$。我們已證得 $\varphi:U\to V$ 爲一對一函數。利用矩陣 S，同理可證得：存一個一對一函數 $\psi:V\to U$。因此，U 和 V 包含有相同個數的有序數對。由於 $V=\{(0,\frac{t}{k})\mid 0\leqslant t<k$ 爲一整數$\}$，V 中恰有 k 個元素。因此，U 中恰有 k 個元素。

[解3] 在平面上，設 $O=(0,0)$，$M=(a,c)$，$N=(b,d)$，$L=(a+b,c+d)$ 由題目知，$(ax_1+bx_2,cx_1+dx_2)=x_1(a,c)+x_2(b,d)$，$0\leqslant x_1,x_2<1$ 故 (ax_1+bx_2,cx_1+dx_2) 恰爲平行四邊形 $OMLN$ 內（含邊）的格子點除去 $\overline{ML}$ 及 $\overline{NL}$ 邊上的格子點。由 Pick 面積公式得 $\frac{s}{2}+I-1=k=ad-bc\Rightarrow\frac{s-2+I}{2}=k$

即恰有k組解。（$\frac{s-2}{2}$代表在邊上的格子點，I代表內部的格子點，s代表邊上的格子點）。

問題四：

［解1］注意$\overline{BC}$爲S_2的直徑

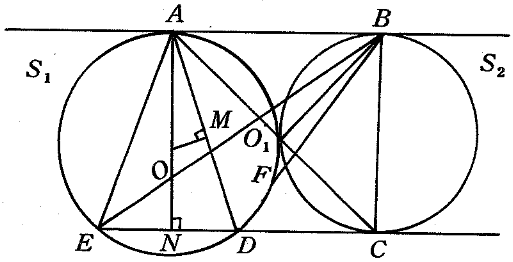
故$\angle BFC=90^\circ$

而$\angle AFB=90^\circ$（易證）

$\therefore\triangle ABC$的外接圓心

在$\overline{AC}$的中點O_1，半徑爲

$\frac{1}{2}\overline{AC}$，而$\triangle BDE$的外



接圓心在$\overline{DE}$中垂線與$\overline{BD}$中垂線之交點，推測A點就是$\triangle BDE$外接圓的圓心：$\overline{AE}=\overline{AD}$，而$\overline{AB}=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=2\sqrt{Rr}$（$S_1$的半徑爲$R$，$S_2$的半徑爲$r$）。過$S_1$圓心$O$作$\overline{OM}\perp\overline{AD}$，垂足爲$M$，則$\triangle AOM\backsim\triangle ADN$

於是$\frac{\overline{AD}}{\overline{AO}}=\frac{\overline{AN}}{\overline{AM}}$ 即 $\frac{\overline{AD}}{R}=\frac{2r}{\overline{AD}/2}\Rightarrow\overline{AD}=2\sqrt{Rr}$

$\therefore\triangle ABC$與$\triangle BDE$的外接圓之公弦與$\overleftrightarrow{AO_1}$垂直

但$\overline{BF}\perp\overleftrightarrow{AC}$且$B$點在此公弦上，於是這兩個外接圓的公弦過點$F$。

［解2］解析幾何法

圓O：$x^2+(y+R)^2=R^2$　　$x^2+y^2+2Ry=0$

$x^2=-2Ry-y^2$

$\quad=4Rr-4r^2$

$\therefore x=\pm2\sqrt{Rr-r^2}$

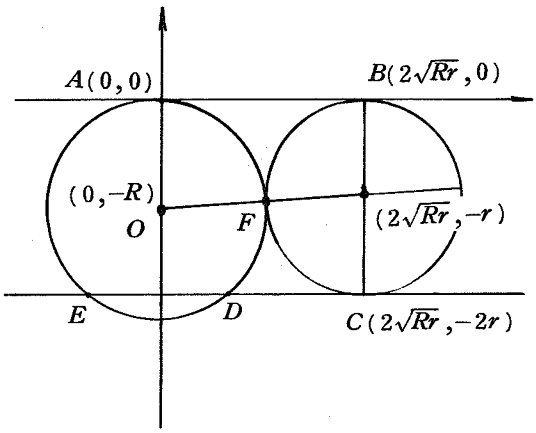
$D(2\sqrt{Rr-r^2},-2r)$，

$E(-2\sqrt{Rr-r^2},-2r)$

$\overline{AD}=\sqrt{4(Rr-r^2)+4r^2}$

$\quad=\sqrt{4Rr}=2\sqrt{Rr}$

$\quad=\overline{AE}=\overline{AB}$



$\triangle BED$外接圓方程：

$x^2+y^2=4Rr$ ⋯⋯⋯①

△ABC外接圓方程：$(x-\sqrt{Rr})^2+(y+r)^2=Rr+r^2$

$$x^2+y^2-2\sqrt{Rr}\,x+2ry=0 \cdots\cdots ②$$

由①、②得公弦在直線 $2\sqrt{Rr}\,x-2ry=4Rr$ 上

即 $\sqrt{Rr}\,x-ry=Rr$ 上……③

另求F點的坐標：

$$\left(\frac{r\cdot 0+R(2r)\sqrt{Rr}}{R+r},\frac{r(-R)+R(-r)}{R+r}\right)\text{即}\left(\frac{2R\sqrt{Rr}}{R+r},\frac{-2Rr}{R+r}\right)$$

而將F點坐標代入③得：$\sqrt{Rr}\,x-ry=\cdots=Rr$ 得證

問題五：（中研院數學所于靖教授提供）

[解]設 $P_1(x)=\prod_{i=1}^{j}(x-\alpha_i)\prod_{i=j+1}^{n}(\overline{\alpha}x-1)=b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}+b_nx^n$。

首先證明 $|a_0|^2+\cdots+|a_{n-1}|^2+1=|b_0|^2+|b_1|^2+\cdots+|b_{n-1}|^2+|b_n|^2$。

由於 $\prod_{i=1}^{j}|\alpha_i|=|b_0|$，即得所要的不等式。

令$A(x)$爲任一複數係數多項式，考慮$A(x)(x-\alpha)$的係數絕對值的平方和。

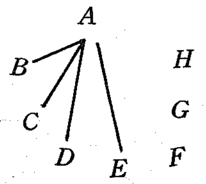
設 $A(x)=\sum_{i=0}^{m}c_ix^i$ 定 $c_{-1}=c_{m+1}=0$

$$\sum_{i=0}^{m+1}|c_{i-1}-\alpha c_i|^2=\sum_{i=0}^{m+1}\left(|c_{i-1}|^2+|\alpha c_i|^2-2R_e(\alpha c_i\overline{c_{i-1}})\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{m+1}|\alpha c_{i-1}|^2+|c_i|^2-2R_e(\alpha c_i\overline{c_{i-1}})$$

$$=\sum_{i=0}^{m+1}|\overline{\alpha}c_{i-1}-c_i|^2\text{。}$$

這個和也是$A(x)(\overline{\alpha}x-1)$的係數絕對值的平方和。



問題六：（中研院數學所葉永南教授提供）

[解]如果n存在則$n\geqslant 9$

令其中編號1的人認識A、B、C、D、E、F、G、H 8個人。

由題目已知1、A共同認識4個人，由對稱性我們可以令這四個人爲B、C、D、E……(*)

則A、F不認識……(**)

但是F、1 互相認識，所以F必須認識B、C、D、E、G、H中四個人$\Rightarrow$從 (*)，F必須認識B、C、D、E中兩人。F、A必須認識B、C、D、E中兩人，還有 1 號總共$\geqslant 3$ 人，此爲矛盾。故 n 不存在。

問題七：(中研院數學所于靖教授提供)

[解] 令 $f(x)=(x-m_1)(x-m_2)\cdots(x-m_n)-1\in Z[x]$。

$f(x)$滿足條件(i)，即

對所有m_i，$1\leqslant i\leqslant n$，$f(m_i)=-1$

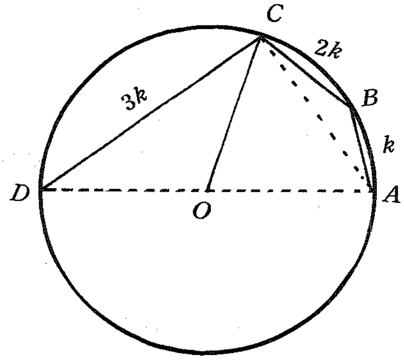
假定 $f(x)$可以被分解爲兩個整係數多項式乘積。

$$f(x)=p(x)q(x),\ p(x),\ q(x)\in Z[x]。$$

$\deg p(x)$與 $\deg q(x)>0$，因而$\deg f(x)$，$\deg q(x)$均$<n$；以$x=m_i$代入得 $p(m_i)q(m_i)=-1$，對$1\leqslant i\leqslant n$成立。因爲 $p(m_i),q(m_i)$均爲整數，所以 $p(m_i),q(m_i)$必異號，所以 $p(m_i)+q(m_i)=0$ 對$1\leqslant i\leqslant n$成立。也就是說多項式 $p(x)+q(x)$的根至少有$m_1,m_2,\cdots,m_n$。因爲 $p(x)+q(x)$的次數小於 n，所以 $p(x)+q(x)=0$，因而 $f(x)=-p(x)^2$。

而 $p(x)-1$ 是$\frac{n}{2}$次多項式却有 n 個根，此爲矛盾。(或觀察 $f(x)$首項係數得到矛盾)

問題八：(台師大數學系陳昭地教授提供)



[解] 設$\overline{AD}$爲直徑

$\overline{AB}=k$，$\overline{BC}=2k$，$\overline{CD}=3k$

$\overline{AC}<3k$

故 $\angle COD>\angle AOC$

$\therefore\ \angle COD>90^\circ$

$\therefore\ r<\overline{CD}=3k\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$

但 $$\sin\frac{\angle AOB}{2}+\sin\frac{\angle BOC}{2}+\sin\frac{\angle COD}{2}=\frac{6k}{2r}=\frac{3k}{r}$$

而 $$3\sin\frac{\frac{\angle AOB}{2}+\frac{\angle BOC}{2}+\frac{\angle COD}{2}}{2}>\sin\frac{\angle AOB}{2}+\sin\frac{\angle BOC}{2}+\sin\frac{\angle COD}{2}$$

得 $\frac{3}{2}>\frac{3k}{r}$ 即 $r>2k\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$

即得 $3k > r > 2k$

另外，$\sin\frac{\angle AOB}{2}=\frac{k}{2r}$，$\sin\frac{\angle BOC}{2}=\frac{k}{r}$，$\sin\frac{\angle COD}{2}=\frac{3k}{2r}$

$$\frac{\angle AOB}{2}+\frac{\angle BOC}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\angle COD}{2}$$

$$\therefore \quad \sin\left(\frac{\angle AOB}{2}+\frac{\angle BOC}{2}\right)=\cos\frac{\angle COD}{2}$$

故得：$\frac{k}{2r}+\frac{\sqrt{r^2-k^2}}{r}+\frac{\sqrt{4r^2-k^2}}{2r}+\frac{-k}{r}=\frac{\sqrt{4r^2-9k^2}}{2r}$

$$(r>0) \Longleftrightarrow \sqrt{r^2-k^2}+\sqrt{4r^2-k^2}=r\sqrt{4r^2-9k^2}$$

$$(r^2-k^2)+(4r^2-k^2)+2\sqrt{r^2-k^2}\sqrt{4r^2-k^2}=r^2(4r^2-9k^2)$$

$$(r^2-k^2)(4r^2-k^2)=(2r^4-7r^2+k^2)^2$$

$$4r^8-28r^6k^2+49r^4k^4-9r^2k^6=0$$

$$4r^6-28r^4k^2+49r^2k^4-9k^6=0$$

$$(2r^3-7rk^2)^2-9k^6=0$$

$$(2r^3-7rk^2+3k^3)(2r^3-7rk^2-3k^3)=0$$

但 $2r^3-7rk^2+3k^2=0$ 的三根分別落在 $(-2k,-k)$，$(0,k)$ 及 $(k,2k)$ 三區間內。而 $3k>r>2k$

於是 $2r^3-7rk^2+3k^2\neq 0 \Rightarrow 2r^3-7rk^2-3k^3=0$

問題九：（清大應數所郭忠勝教授提供）

［解］將 f 改寫成

$$\begin{aligned} f(x,y) &= y^2[1+b_{2n}y^{2n-2}+\cdots+b_2x^{2n-2}]+x^{2n-2}[ax^2+b_1xy] \\ &= y^2[1+b_{2n}y^{2n-2}+\cdots+(b_2-b)x^{2n-2}]+x^{2n-2}[ax^2+b_1xy+by^2], \end{aligned}$$

其中 $b=\frac{b_1^2}{4a}+1$

$$=y^2[1+b_{2n}y^{2n-2}+b_{2n-2}y^{2n-4}x^2+\cdots+(b_2-b)x^{2n-2}]+x^{2n-2}[a(x+\frac{b_1}{2a}y)^2+y^2]$$

令 $\alpha=\max\{1,|b_{2n}|,|b_{2n-2}|,\cdots,|b_2-b|\}$

$$r=\sqrt[2n-2]{\frac{1}{2n(\alpha+1)}}$$

則 $1+b_{2n}y^{2n-2}+b_{2n-2}y^{2n-4}+\cdots+(b_2-b)x^{2n-2}$

$\geqslant 1-\alpha r^{2n-2}-\alpha r^{2n-2}-\cdots-\alpha r^{2n-2}$

$= 1-\alpha\cdot\dfrac{2n}{2n(1+\alpha)}$

$= 1-\dfrac{\alpha}{\alpha+1}=\dfrac{1}{\alpha+1}>0$

故當 $0<x^2+y^2<r^2$ 時，$f(x,y)>0$。

四、附錄：專題探討主題及獨立研究題

1. 專題探討(1)：代數(1)

獨立研究(1)：林哲雄教授與于靖教授共同提供。答卷時間 100 分鐘。

1-1 設 $f(x,y)$ 爲二元實係數多項式。若 $f(x,y)$ 不能被 x^2+2y^2-1 整除，則方程組

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ x^2+2y^2-1=0 \end{cases}$$

不可能有無窮多組實數解 (x,y)。

1-2 設 $f(x)$ 爲非零的實係數多項式且滿足

$$f(x^4)=f(x)f(x-1)f(x^2-1)。$$

試求 $f(x)$。

2. 專題探討(2)：幾何變換

獨立研究(2)：陳創義教授提供，答卷時間100分鐘。

2-1 在$\triangle ABC$的各邊上作正三角形$\triangle BCA_1$，$\triangle ACB_1$，$\triangle ABC_1$，使得 A_1 和 A 在直線 BC 的異側，B_1 和 B 在直線 AC 的異側，但 C_1 和 C 在直線 AB 的同側。設 M 爲$\triangle ABC_1$的中心。

試證：$\triangle A_1B_1M$是頂角爲 120° 的等腰三角形。

2-2 設 A，B，C，D 四點共圓。若一圓的圓心在 $\overline{AB}$ 邊上且與 $\overline{BC}$，$\overline{CD}$，$\overline{DA}$ 都相切。

證明：$\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}$。

3. 專題探討(3)：離散數學（I）

獨立研究(3)：朱亮儒教授提供，答卷時間100分鐘。

3-1 設 $v_1, v_2, \cdots, v_{94}$ 爲一圓周上相異的94個點，試問能否用1995條線段來連接這些點，使得所得的圖形是一個簡單連通的尤拉圖。

3-2 某棒球對抗賽共35隊參加，今規定每隊至少比賽2場且全部賽程共50場。試找出最大的整數 k 使得不論賽程如何安排都有 k 場比賽中的 $2k$ 個球隊皆不同。

4. 專題探討(4)：複數幾何

獨立研究(4)：陳昭地教授、趙文敏教授共同提供，答卷時間100分鐘。

4-1 已知 K_1 與 K_2 爲同一平面上的兩個相異圓；A，B 爲此兩圓的交點且 $\overline{AB}$ 爲圓 K_1 的直徑，P 爲圓 K_1 內部且在圓 K_2 的圓周上的一定點。試用尺規作圖，在 K_1 圓周上作出兩點 C 與 D 使得 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ 且 $\angle CPD = 90°$。

4-2 設 A_1, A_2, A_3, A_4 四點共圓且 L_i 是點 A_i 對其它三點的西姆松(Simson)線（$i = 1, 2, 3, 4$）。

試證：L_1, L_2, L_3, L_4 四線共點。

5. 專題探討(5)：國際數學競試試題解題策略

獨立研究(5)：香港大學張百康教授提供，答卷時間100分鐘。

5-1 對任何自然數 N，以符號 $S(N)$ 表示 N 的所有數字的和。

$$\frac{S(8N)}{S(N)} \geqslant \frac{1}{8}\text{。}$$

5-2 承問題一，試求滿足下列條件的所有自然數 k：存在一個正實數 C_k 使得對任何自然數 N，

$$\frac{S(kN)}{S(N)} \geqslant C_k\text{。}$$

對一給定的自然數 k，求 C_k 的最大值。

6. 專題探討(6)：函數方程

獨立研究(6)：張瑞吉教授提供，答卷時間100分鐘。

6-1 試求滿足以下條件的函數 $f: Q \to C$。

(1) 對任何 $x_1, x_2, \cdots, x_{1995} \in Q$ 恆有

$$f(x_1 + x_2 + \cdots + x_{1995}) = f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_{1995})\text{。}$$

(2) 對 $x \in Q$ 恆有

$$\overline{f(1995)}f(x)=f(1995)\overline{f(x)}。$$

6-2 設 $f: N \to N$ 且滿足

(1) $f(2)=2$。

(2) 若 m，n 互質則 $f(mn)=f(m)f(n)$。

(3) 若 $m>n$ 則 $f(m)>f(n)$。

證明：對所有自然數 n，$f(n)=n$。

7. 專題探討(7)：不等式

獨立研究(7)：黃文達教授提供，答卷時間100分鐘。

7-1 設 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 爲非負實數。證明

$$\frac{a_1^5+a_2^5+\cdots+a_n^5}{n} \geqslant \left(\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}\right)^5 。$$

7-2 設 $ABCD$ 爲四面體，R 爲其外接球半徑，r 爲其內切球半徑。

證明：$R \geqslant 3r$，又問等號何時成立？

8. 專題探討(8)：數論（Ⅰ）

獨立研究(8)：于靖教授與許志農博士共同提供，答卷時間100分鐘。

8-1 設自然數 x，y 滿足 $x^2-2y^2=1$。證明存在一個自然數 n 使得

$$x+y\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^n。$$

8-2 設 $p(x)=x^5-101x^4+2x^3-3x^2+11x-5$。

證明此一多項式不可能被分解爲兩個次數大於0的整係數多項式的乘積。

9. 專題探討(9)：離散數學解題策略

獨立研究(9)：張鎮華教授與葉永南教授共同提供，答卷時間100分鐘。

9-1 設在 9×9 的棋盤的每個方格中心都有一隻甲蟲。根據一個信號它們會同時沿著某條對角線越過一個頂點各自爬到另一個方格中。於是，有些方格中會有若干隻甲蟲，而有些方格是空著的。試確定有甲蟲的方格最少有多少個。如果棋盤是 $n\times n$，那結果又如何？

9-2 設集合

$$A=\{(a_1,a_2,\cdots,a_{50})\mid 1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{50}<300 \text{ 且 } a_i\equiv i \pmod 2\}。$$

試確定集合 A 有多少元素。

10. 專題探討(10)：組合數學（Ⅰ）

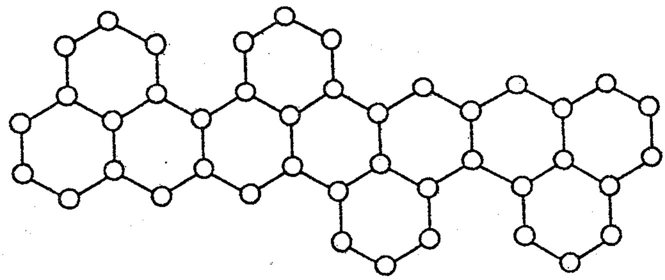
獨立研究(10)：葉永南教授提供，答卷時間100分鐘。

10-1 某次宴會共有 n 個人圍著一個大圓桌（ $n \geqslant 6$ ），剛好坐滿。主人在每位客人面前擺一瓶酒而且每個人和坐在他左一、左二、右一、右二的人面前的酒不同牌子。

如果主人希望宴會中酒的牌子種類越少越好，則主人要準備幾種不同牌子的酒？

10-2 圖形 G 的邊覆蓋集是由圖形 G 的某些邊所成的一個集合，使得圖形 G 的每一個頂點都是此集合中某些邊的端點。

試確定下面圖形的邊覆蓋集最少包含幾個邊。（註：圖形中的小圓圈代表邊的端點）



11. 專題探討(11)：不定方程

獨立研究(11)：許志農博士、洪有情教授、陳昭地教授共同提供，答卷時間100分鐘。

11-1 (1) 試求 $5x^3+11y^3+13z^3=0$ 的所有整數解 (x, y, z)。

(2) 找出 $x(x+1)=2^{100}y(y+1)$ 的所有整數解 (x, y)。

11-2 試找出所有面積是8且三邊長都是有理數的直角三角形。

12. 專題探討(12)：離散數學（Ⅱ），朱亮儒教授主持。

13. 專題探討(13)：數論（Ⅱ），許志農博士主持。

14. 專題探討(14)：立體幾何，陳創義教授主持。

15. 專題探討(15)：數學歸納法解題策略，陳昭地教授主持。

16. 專題探討(16)：代數（Ⅱ），林哲雄教授主持。

17. 專題探討(17)：組合數學（Ⅱ），葉永南教授主持。

★