中華民國參加1995年
亞太數學奧林匹亞競賽研習營
模擬競試、參考解答及獨立研究試題

中華民國數學奧林匹亞委員會
試題組、訓練組提供

一、模擬競試試題

編號：________（學生自塡）

注意事項：(1)本試卷共五題，每題滿分七分。

(2)考試時間：4小時，二月十五日（08:00～12:00）

(3)計算紙必需連同試卷一起交回。

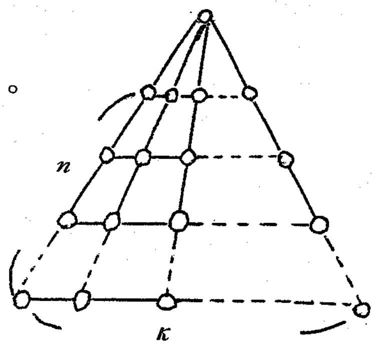
(4)不可使用計算器。

問題一：試求滿足下列聯立不等式的實數解（$x_1, x_2, \cdots, x_{1995}$）

$$\begin{cases} \sqrt{x_n} + 83\sqrt{x_{n+2}} \geqslant 84\sqrt{x_{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots, 1993; \\ \sqrt{x_{1994}} + 83\sqrt{x_1} \geqslant 84\sqrt{x_{1995}}; \\ \sqrt{x_{1995}} + 83\sqrt{x_2} \geqslant 84\sqrt{x_1}. \end{cases}$$

問題二：將 $2^{39}-1 = 549755813887$ 化爲標準分解式。

問題三：小英有一個由 $kn+1$ 個（$k \geqslant 3$，$n \geqslant 3$）珠子和絲帶串成的三角頭飾（如右圖）。小英希望把每顆珠子塗上某一種顏色，使得相鄰的珠子顏色都不同。如果小英想要顏色種類用得最少，請問他要用幾種不同的顏色來塗珠子。（註：兩珠子相鄰是指兩珠子間被一線段連接且中間沒有其他珠子）。



問題四：設 A，B 爲圓 O 上的兩個已知點且 $\overline{XY}$ 爲圓 O 上的任一條直徑。試求直徑 $\overline{XY}$ 在圓 O 上變動時，兩直線 $\overleftrightarrow{AX}$，$\overleftrightarrow{BY}$ 交點的軌跡。

問題五：假設數列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$，滿足以下條件：

$a_0 = 5$，$a_1 = 3$；而且 $n \geqslant 0$ 時 $5a_{n+2} = 6a_{n+1} - 5a_n$，

試證明：$|a_n| \leqslant 5$ 恆成立。

二、模擬競試參考解答

問題一

解：令 $\sqrt{x_n}=a_n$，$n=1,2,\cdots,1995$；原聯立不等式(*)等價於

$$(**)\begin{cases} a_k+83\,a_{k+2}\geqslant 84\,a_{k+1} & k=1,2,\cdots,1993 \\ a_{1994}+83\,a_1\geqslant 84\,a_{1995} \\ a_{1995}+83\,a_2\geqslant 84\,a_1 \end{cases}$$

即得

$$(***)\begin{cases} a_k-a_{k+1}\geqslant 83\,(a_{k+1}-a_{k+2}) & k=1,2,\cdots,1993 \\ a_{1994}-a_{1995}\geqslant 83\,(a_{1995}-a_1) \\ a_{1995}-a_1\geqslant 83\,(a_1-a_2) \end{cases}$$

(1) 當 $a_1=a_2=\cdots=a_{1995}$ 時，代入(***)直接檢驗

得知滿足聯立不等式，即 $x_1=x_2=\cdots=x_{1995}$ 之任意實數均為(*)之解。

(2) 現證：唯有 $x_1=x_2=\cdots=x_{1995}$ 外，(*)無其他之解

先證：$a_1=a_2$

① 若 $a_1>a_2$，則由(***)

由下往上推得　$a_{1995}>a_1$，$a_{1994}>a_{1995}$，$\cdots$，$a_1>a_2$

於是　$a_1>a_2>\cdots>a_{1994}>a_{1995}>a_1$

得　$a_1>a_1$　之矛盾結果

② 若 $a_1<a_2$，則由(***)

由上往下推得　$a_1<a_2$，$a_2<a_3$，$\cdots$，$a_{1994}<a_{1995}$，$a_{1995}<a_1$

亦得　$a_1<a_1$　之矛盾結果

仿上可證得　$a_2=a_3$，$a_3=a_4$，$\cdots$，$a_{1994}=a_{1995}$

故得證　$a_1=a_2=\cdots=a_{1995}$

綜合上述得到實數解為 $\{(x_1,x_2,\cdots,x_{1995})\mid x_1=x_2=\cdots=x_{1995}$，$x_k$ 為任意實數$\}$.

問題二

解：設 $p\mid 2^{39}-1$，由費馬小定理 $2^{p-1}\equiv 1\pmod{p}$，

假設 d 是最小自然數，使 $2^d\equiv 1\pmod{p}$，則 $d\mid(p-1,39)$，

因此 d 只可能是 3 或 13 或 39。

由 $2^3-1=7$，而 $7\mid(2^{39}-1)$ 知 7 是一個我們要的質因數；

假使奇質數 $p \mid (2^{13}-1)(=8191)$，可知 $p-1\equiv 0 \pmod{13}$，

因而　$p-1\equiv 0 \pmod{26}$

這種質數 p，最小可能是 53，然後是 79。但 53、79 均非 8191 的因數，因此 8191 是質數。

由 $2^{39}-1/(7,8191)=9588151$，知 8191 也是所要的質因數；

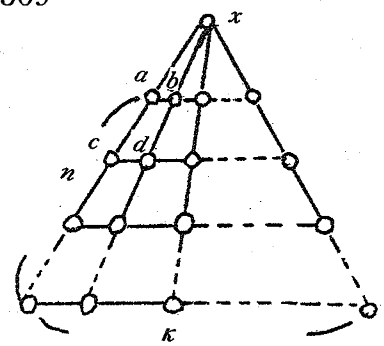
其它所要找的是 9588151 的因數，而且要滿足

$$p-1\equiv 0 \pmod{39},\ p-1\equiv 0 \pmod{78}$$

這種質數最小的可能是 79，其次是 157，313，再大的都超過了 $\sqrt{9588151/79}=\sqrt{121369}$。79 是 $2^{39}-1$ 的因數，但 157，313 都不是 $9588151/79=121369$ 的因數，因此 121369 也必然是質數，故得

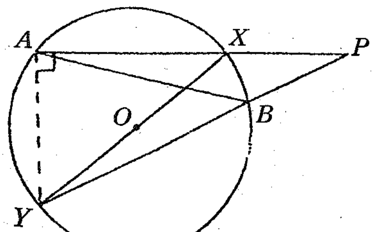
$$2^{39}-1=7\times 8191\times 79\times 121369$$

問題三

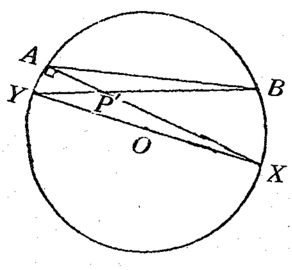


解：因爲有三顆珠子 x，a，b 兩兩都相鄰，所以至少用三種顏色。令顏色的編號爲 1，2，3，4，… 我們可以把 x 塗上 1 號顏色，再把第奇數列的珠子從 a，b，…，依序塗上 2，3，2，3，…，的顏色，再把偶數列的珠子從 c，d，…，依序塗上 3，2，3，2，… 的顏色。這樣小英只須用 3 種顏色即可。

問題四



①



②

解：(1)　當 $\overline{AB}$ 爲直徑時，$\overline{AX}\,/\!/\,\overline{BY}$，$\overline{AX}$ 與 $\overline{BY}$ 無交點（或交於無窮遠點），其軌跡爲空集合或無限遠點。

(2)　令 $\overline{AB}$ 不是直徑，此時 $\angle XAY=90°$

且知 $\angle AYB=\dfrac{1}{2}\widehat{AB}$ 爲常數

(3)　如圖①得 $\angle APB=90°-\angle AYB$ 爲常數

如圖②得$\angle AP'Y = 90^\circ - \angle AYB$亦爲常數

$$\angle AP'B = 180^\circ - \angle AP'Y$$

(4) 在圖①，P點的軌跡在使$\angle APB$爲定值且$\overline{AB}$爲其一弦的圓弧上。

(5) 在圖②中，$\angle AP'B$爲定値，$\overline{AB}$固定，故P'在以$\overline{AB}$爲弦之一圓弧上。

(6) 在圖①中之$\triangle APY$與圖②中之$\triangle AP'Y$爲相似形，故得$\angle APB+\angle AP'B=180^\circ$

於是A，P，B，P'四點共圓，於是P，P'在同一圓上。

(7) 任取一$\overleftrightarrow{AX}$與$\overleftrightarrow{BY}$之交點P_0作$\triangle ABP$之外接圓K，則滿足問題條件之P點都在圓K上。

(8) 反之K上的任一點P，連$\overline{AP}$，$\overline{BP}$分別交圓於X'，Y'，則$\angle APB=\angle AP_0B$或$\angle APB+\angle AP_0B=180^\circ$，得知$\overline{X'Y'}$爲直徑。即$K$上的任一點都是某條直徑$\overline{X'Y'}$與$\overline{AB}$之$\overleftrightarrow{AX'}$與$\overleftrightarrow{BY'}$之交點。

(9) 綜合上述得證本問題之軌跡爲一圓（此圓可尺規作圖，亦可用三角定弦定律算出半徑$r=\dfrac{\overline{AB}}{2\sin\angle APB}$）。

問題五

解：(1) 解特微方程$5x^2=6x-5$ 得 $x=\dfrac{3\pm 4i}{5}$

(2) 令$a_n=\alpha\left(\dfrac{3+4i}{5}\right)^n+\beta\left(\dfrac{3-4i}{5}\right)^n$

$$\alpha+\beta=a_0=5\ ,\quad \alpha\left(\frac{3+4i}{5}\right)+\beta\left(\frac{3-4i}{5}\right)=a_1=3$$

$$\Rightarrow(\alpha-\beta)\frac{4i}{5}=3-\frac{3}{5}\cdot 5=0$$

$$\Rightarrow\alpha=\beta=\frac{5}{2}$$

(3) $|a_n|\leqslant\left|\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{3+4i}{5}\right)^n\right|+\left|\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{3-4i}{5}\right)^n\right|\leqslant\dfrac{5}{2}+\dfrac{5}{2}=5$

即得證$|a_n|\leqslant 5$恆成立。

三、獨立研究試題

1. 獨立研究(1)：綜合幾何（陳創義教授提供），研究作答時間100分鐘。

1-1　給定$\triangle ABC$及內部一點P。設圓R_1, R_2, R_3分別爲$\triangle PBC$，$\triangle APC$，$\triangle ABP$的外接圓且L_1，L_2，L_3分別爲圓R_1，R_2，R_3在P點上的切線。假設點D，E，F分別爲直線L_1與直線$\overleftrightarrow{BC}$，直線L_2與直線$\overleftrightarrow{CA}$，直線L_3與直線$\overleftrightarrow{AB}$的交點。

試證：D，E，F三點共線。

1-2　設圓R_1，R_2分別是以O_1，O_2爲圓心，r_1, r_2爲半徑的圓且圓心$O_1 \neq$圓心O_2。若一圓分別將圓R_1，R_2的圓周二等分，且此圓的圓心爲P。試求P點的軌跡。

1-3　考慮在同一平面上半徑爲R與r（$R > r$）的兩個同心圓。設點P是小圓周上的一個固定點，點B是大圓周上的一個動點，直線$\overleftrightarrow{BP}$與大圓周相交於另外一點C，過點P且與直線$\overleftrightarrow{BP}$垂直的直線L與小圓周相交於另一點A（若直線L與小圓相切於點P，則令$A = P$）。

(1)　試證：$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2$爲定值。

(2)　求線段$\overline{AB}$中點的軌跡。

2. 獨立研究(2)：鴿籠原理（葉永南教授提供），研究作答時間100分鐘。

2-1　平面上任13個整點中，必有某4個點的重心爲整數。

2-2　某市發出車牌號碼均由6個數字（從0到9）組成，但要求任意2個車牌至少有2個不同數位（如車牌038471和030471不能同時使用）。試求該市最多能發出多少個不同車牌。

2-3　一直線上有k個相異點且任何兩相異點都作了以連接這二點的線段爲直徑的圓。每圓都塗上n種顏色的一種，已知任何兩個外相切的圓都不同色，試證$k \leqslant 2^n$。

3. 獨立研究(3)：不等式（黃文達教授提供），作答時間100分鐘。

3-1　設a，b，c均爲正實數。

試求$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}\right)$的最小值。

3-2　若方程組 $\begin{cases} x+3y+5z+7w=a \\ x+6y+20z+21w=a^2 \\ x+12y+80z+63w=a^3 \end{cases}$ 有非負實數解 (x,y,z,w)。

試求 a 的值。

3-3　設 $a_1, a_2, \cdots, a_{1995}$ 爲彼此相異的正整數。試證明不等式

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1995} \leqslant a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_{1995}}{1995^2}$$

成立。

4. 獨立研究(4)：數論初步（于靖教授提供），作答時間100分鐘。

4-1　證明存在有無窮多個質數 P 滿足 $P \equiv 3 \pmod 4$。

4-2　證明 $x^3-6xy^2+y^3=11$ 沒有整數解。

4-3　對自然數 m，定義 $S_m=1^m+2^m+\cdots+100^m$。證明

(1)　$S_{31} \equiv 0 \pmod{101}$。

(2)　$S_{200} \equiv -1 \pmod{101}$。

4-4　證明數列 $\langle 2^n+1 \rangle$ 中含有一個無窮子數列，其中任意兩項均互質。

5. 獨立研究(5)：遞迴數列（朱亮儒教授提供），作答時間100分鐘。

5-1　若數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足：$a_0=0$，$a_1=1$，$a_2=4$ 且對所有自然數 $n \geqslant 3$

$a_n=3a_{n-2}+2a_{n-3}$。試求 a_{1995} 的值。

5-2　設 $p \geqslant 3$ 爲一正整數且 a_n 表示費氏數 f_n 以 p 除所得的餘數。試證 $\langle a_n \rangle$ 爲一週期是偶數的週期數列。

5-3　將有 k 條分數線的繁分數

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots\, 1+\cfrac{1}{1}}}}$$

化簡成 $\frac{b}{a}$，其中 a，b 爲互質的正整數且 $2 \leqslant k \leqslant 1995$。試證不論 k 值爲何，$\frac{ab-1}{a+b}$ 或 $\frac{ab+1}{a+b}$ 中恰有一爲費氏數。

★