1995年第7屆亞太數學奧林匹亞競賽試題及參考解答

1995年3月14日

中華民國數學奧林匹亞委員會

注意事項：

(1) 時間分配：4小時（09:30-13:30）。

(2) 配分：每題7分，總計35分。

(3) 不可使用計算器。

(一) 試題

問題一、找出所有實數數列 $a_1, a_2, \cdots, a_{1995}$ 滿足下列條件：

對每 $n=1,2,\cdots,1994$ 恆有 $2\sqrt{a_n-(n-1)} \geqslant a_{n+1}-(n-1)$ 且

$2\sqrt{a_{1995}-1994} \geqslant a_1+1$。

問題二、令 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 爲取値介於2和1995之間的整數數列（即 $2 \leqslant a_1, a_2, \cdots, a_n \leqslant 1995$）且滿足下列兩個條件：

(i) 任何兩個 a_i 皆互質。

(ii) 每一個 a_i 或者是一個質數，或者是兩個或兩個以上相異質數的乘積。（也就是說 a_i 沒有平方因子）

試決定最小的正整數 n 使得任何這樣的整數數列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 一定包含有一個質數。

問題三、設 $PQRS$ 爲圓內接四邊形，其中線段 PQ 與 RS 不平行。考慮通過 P 與 Q 兩點的圓系，與通過 R 與 S 兩點的圓系。試決定這兩個圓系中所有相切圓的切點所成的集合 A。

問題四、設 C 是圓心爲 O 且半徑爲 R 的圓，而 S 是圓 C 內部的一個定點。過 S 任作兩條互相垂直的弦 $\overline{AA'}$ 與 $\overline{BB'}$，再作四個矩形 $SAMB$, $SBN'A'$, $SA'M'B'$ 與 $SB'NA$。當 A 在圓 C 上變動時，點 M, N', M', N 所成的圖形爲何？

問題五、找一最小的正整數 k，使得我們能找到一個從整數集 Z 映到 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的函數 f，對所有 $|x-y| \in \{5,7,12\}$ 均滿足 $f(x) \neq f(y)$。

(二) 參考解答

問題一

解一 （*APMO*原設計者之參考解法）： 假設（$a_1, a_2, \cdots, a_{1995}$）爲已知聯立不等式之一解，則

$$\sum_{n=1}^{1995} 2\sqrt{a_n-(n-1)} \geqslant \sum_{n=1}^{1995} a_n - \sum_{n=1}^{1994}(n-1)+1$$

$$=\sum_{n=1}^{1995} a_n - \sum_{n=1}^{1995}(n-1)+1995$$

即 $0 \geqslant \sum_{n=1}^{1995}\{a_n-(n-1)-2\sqrt{a_n-(n-1)}+1\}$

因 $\{\sqrt{a_n-(n-1)}-1\}^2 = a_n-(n-1)-2\sqrt{a_n-(n-1)}+1$

故 $0 \geqslant \sum_{n=1}^{1995}\{\sqrt{a_n-(n-1)}-1\}^2 \geqslant 0$

因此 $\sqrt{a_n-(n-1)}=1$ ，（$n=1,2,\cdots,1995$）

故 $a_n=n$ ，$n=1,2,\cdots,1995$

反之，若 $a_n=n$ ，$n=1,2,\cdots,1995$

則 $2\sqrt{a_n-(n-1)}=a_{n+1}-(n-1)=2$ （$n=1,2,\cdots,1994$）

且 $2\sqrt{a_{1995}-1994}=a_1+1=2$

即不等式均成立。

解二 陳明揚同學的解法

此不等式等價於：

$$\begin{cases} 2\sqrt{a_1} \geqslant a_2 \\ 2\sqrt{a_2-1} \geqslant a_3-1 \\ 2\sqrt{a_3-2} \geqslant a_4-2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ 2\sqrt{a_{1994}-1993} \geqslant a_{1995}-1993 \\ 2\sqrt{a_{1995}-1994} \geqslant a_1+1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{a_1} \geqslant (a_2-1)+1 \\ 2\sqrt{a_2-1} \geqslant (a_3-2)+1 \\ 2\sqrt{a_3-2} \geqslant (a_4-3)+1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ 2\sqrt{a_{1995}-1994} \geqslant a_1+1 \end{cases}$$

將此聯立不等式各式相加得：

$$2\sqrt{a_1}+2\sqrt{a_2-1}+2\sqrt{a_3-2}+\cdots+2\sqrt{a_{1995}-1994}$$

(A)

$$\geqslant(a_2-1)+1+[(a_3-2)+1]+[(a_4-3)+1]+\cdots+(a_1+1)$$

$$\geqslant 2\sqrt{(a_2-1)\cdot 1}+2\sqrt{(a_3-2)\cdot 1}+\cdots+2\sqrt{a_1\cdot 1}\text{（算幾不等式）}$$

$$=2\sqrt{a_2-1}+2\sqrt{a_3-2}+\cdots+2\sqrt{a_1}$$

∴　(A)中的“$\geqslant$”應變爲“$=$”

而其充要條件爲

$$a_2-1=1$$
$$a_3-2=1$$
$$\vdots$$
$$a_{1995}-1994=1$$
$$a_1=1$$

∴　解得出　$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$，…，$a_{1995}=1995$

爲所有滿足所求不等式的解　#

註：參與本屆競賽學生大多使用算幾不等式或柯西不等式，爲我國中學生的拿手題，很少使用解法(一)之方式。

問題二

解一　答案是 14

令M爲所需的最小正整數。因爲數列 $a_1=2\times101=202$，$a_2=3\times97=291$，$a_3=5\times89=445$，$a_4=7\times83=581$，$a_5=11\times79=869$，$a_6=13\times73=949$，$a_7=17\times71=1207$，$a_8=19\times67=1273$，$a_9=23\times61=1403$，$a_{10}=29\times59=1711$，$a_{11}=31\times53=1643$，$a_{12}=37\times47=1739$，$a_{13}=41\times43=1763$ 滿足條件(i)和(ii)，但不包含任何質數，因此，$M>13$。

現在，我們要證明任何包含有 14 個元素且滿足條件(i)和(ii)的整數數列必定包含有一個質數。我們將用反證法來證明。假設 $a_1,a_2,\cdots,a_{14}$ 爲一個取值介於2和1995之間且滿足條件(i)和(ii)的整數數列，但任意 a_i 皆不爲質數。由條件(ii)知此數列的每一個元素必至少有兩個相異的質因數。在每個元素中任取兩個質因數且依其大小排列成 $p_1<p_2<\cdots<p_{26}<p_{27}<p_{28}$（由條件(i)和(ii)知這樣的排列是可行的）。因爲第 14 個質數是 43，故 $43\leqslant p_{14}$，$47\leqslant p_{15}$，依此類推。因爲 $43\times47=2021>1995$，因此 p_{14} 必須

和 $p_1,p_2,\cdots,p_{13}$ 中的一個質數來配成某一個 a_i 的兩個質因數。相同地，p_{15} 必須和 $p_1,p_2,\cdots,p_{13}$ 中的一個質數來配成另一個 a_i 的兩個質因數，以此類推，但不能重覆選取 $p_1,p_2,\cdots,p_{13}$ 中的質數。因爲 $p_{14},\cdots,p_{28}$ 共有 15 個數，而 $p_1,p_2,\cdots,p_{13}$ 僅有 13 個數，故存在 $13<j<l$ 使得 p_j 和 p_l 必須配在一起來形成某一個 a_k 的兩個質因數。因此，$a_k \geqslant p_j p_l \geqslant p_{14}p_{15} \geqslant 43\times 47>1995$。此與假設 $a_k \leqslant 1995$ 相互矛盾，得證。

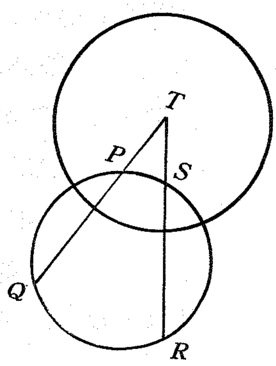
解二 （于靖教授提供）

令 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 爲取值介於 2 和 1995 之間且滿足條件(i)和(ii)的整數數列。因爲 $43<\sqrt{1995}<47$ 且 $43\times 47=2021>1995$，若元素 a_i 爲相異質數的乘積且有一質因數 $\geqslant 43$，則 a_i 的其他質因數必 <43。由於 <43 的質數祇有 2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41 等 13 個，若每一個 a_i 皆不爲質數，則每一個 a_i 皆有 <43 的質因數。由條件(i)知這些 <43 的質因數皆相異。因此，若每一個 a_i 皆不爲質數，則 $n\leqslant 13$。亦即，若 $n\geqslant 14$ 時，必有一元素 a_i 爲質數。

因爲數列 $a_1=2\times 101=202$，$a_2=3\times 97=291$，$a_3=5\times 89=445$，$a_4=7\times 83=581$，$a_5=11\times 79=869$，$a_6=13\times 73=949$，$a_7=17\times 71=1207$，$a_8=19\times 67=1273$，$a_9=23\times 61=1403$，$a_{10}=29\times 59=1711$，$a_{11}=31\times 53=1643$，$a_{12}=37\times 47=1739$，$a_{13}=41\times 43=1763$滿足條件(i)和(ii)，但不包含任何質數，因此，此題所需的最小正整數爲 14。

問題三

解　因 PQ 與 RS 不平行，直線 PQ 與 RS 相交於圓 $PQRS$ 外一點 T。令 $r=\sqrt{TP\cdot TQ}=\sqrt{TR\cdot TS}$（因 P,Q,R,S 四點共圓，$TP\cdot TQ=TR\cdot TS$）。設 C 爲以 T 爲圓心 r 爲半徑的圓。今待證集合 A 爲圓 $PQRS$ 上的點或者爲圓 C 上的點。



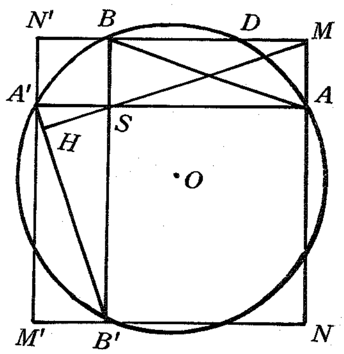
因 P,Q,R,S 四點共圓，顯然圓

$PQRS$ 上的點都包含於 A 中。此外，若 V 為圓 C 上的點，則因 $TV^2 = TP \cdot TQ = TR \cdot TS$，而得 TV，圓 PQV 以及圓 RSV 相切於 V。即 V 為集合 A 中的點。反之，設 V 為 A 中的點。假設 V 不在圓 $PQRS$ 上，則圓 PQV 與圓 RSV 僅相切於 V 一點。若直線 TV 交圓 PQV 於 V 與 V_1，交圓 RSV 於 V 與 V_2，則 $TP \cdot TQ = TV \cdot TV_1$，$TR \cdot TS = TV \cdot TV_2$。因 P, Q, R, S 四點共圓，$TP \cdot TQ = TR \cdot TS$，由上兩式得 $TV \cdot TV_1 = TV \cdot TV_2$。注意到 T 是 $\overleftrightarrow{PQ}$ 與 $\overleftrightarrow{RS}$ 的交點，$T \neq V$，$\overline{TV} \neq 0$。從而得 $TV_1 = TV_2$。但 T 在圓 PQV 以及圓 RSV 的外部，得 $V_1 = V_2$。又因 V 是切點，得 $V_1 = V_2 = V$。即 TV，圓 PQV 以及圓 RSV 相切於 V。因此 V 落在圓 C 上。

註：在上面的解法中，設 E、F 為 $\overleftrightarrow{PQ}$ 與圓 C 的兩個交點，G、H 為 $\overleftrightarrow{RS}$ 與圓 C 的兩個交點，A 中的點 V 可能為 E、F、G、H 中的一點，此時可將直線 PQV 或直線 RSV 視為半徑無限大的圓，故推理過程亦可成立，但未清楚寫出來；參加此次競賽部分學生將此四點排除亦視為正確。

問題四

解一　（ APMO 原設計者之參考解答）



顯然地，$MNM'N'$ 為一矩形，其邊分別與 $\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$ 平行。因為 $\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$ 的垂直平分線都通過 O，所以，$\overline{MN}$、$\overline{MN'}$ 的垂直平分線也通過 O。於是，O 是 $MNM'N'$ 的中心。因此，M, N, M', N' 與 O 等距離。

設直線 SM 與 $\overline{A'B'}$ 交於 H。因為

$$\angle HSA' = \angle MSA = \angle BAA' = \angle BB'A'$$

所以，$\angle HSA' + \angle HA'S = \angle BB'A' + \angle HA'S = 90^\circ$，$\overline{MH} \perp \overline{A'B'}$。

設 $\overline{MN'}$ 與圓 C 的另一交點為 D，因為 $\angle BDA' = \angle BAA' = \angle BMS$，所以，$\overline{DA'} \parallel \overline{MH}$，$\overline{DA'} \perp \overline{A'B'}$，$\overline{DB'}$ 為直徑。於是，

$$\overline{AB}^2 + \overline{A'B'}^2 = \overline{A'D}^2 + \overline{A'B'}^2 = \overline{DB'}^2 = 4R^2。$$

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MN'}^2 + \overline{M'N'}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2$$
$$= (\overline{SA} + \overline{SA'})^2 + (\overline{SB} + \overline{SB'})^2$$

$= (\overline{SA}^2 + \overline{SB}^2) + (\overline{SA'}^2 + \overline{SB'}^2) + 2\,\overline{SA}\cdot\overline{SA'} + 2\,\overline{SB}\cdot\overline{SB'}$

$= \overline{AB}^2 + \overline{A'B'}^2 + 4\,\overline{SA}\cdot\overline{SA'}$

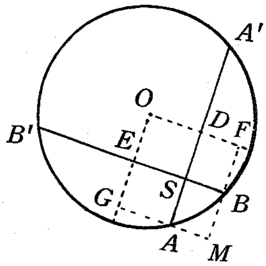
$= 4R^2 + 4(R^2 - \overline{OS}^2)$

$= 8R^2 - 4\overline{OS}^2$

$\overline{OM} = \sqrt{2R^2 - \overline{OS}^2}$ 此為定值。

因此，M, N, M', N' 所成的圖形是以 O 為圓心，$\sqrt{2R^2-\overline{OS}^2}$ 為半徑的圓。

解二　（陳和麟同學之解法）



設圓半徑為 r

由 O 向 $\overline{AA'}$ 作垂線交 $\overline{AA'}$ 於 D

由 O 向 $\overline{BB'}$ 作垂線交 $\overline{BB'}$ 於 E

由 M 向 $\overleftrightarrow{OD}$，$\overleftrightarrow{OE}$ 作垂線交於 F, G

$\because$　$\overleftrightarrow{OD} \parallel \overleftrightarrow{BE}$，$\overleftrightarrow{OE} \parallel \overleftrightarrow{AD}$ ………①

且 $\angle EOD = 360° - \angle OES - \angle ODS - \angle DSE = 90°$ ……………②

$\therefore$　$\overline{OM}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{OG}^2$　（由②）

$= \overline{DA}^2 + \overline{EB}^2$　（由①）

$= r^2 - \overline{OE}^2 + r^2 - \overline{OD}^2$

$= 2r^2 - \overline{OS}^2$　為一定值

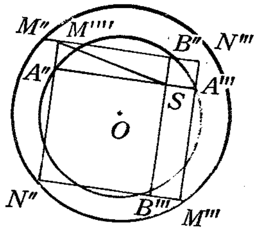
$\therefore$　$\overline{OM}$ 為一定值

即 M 的軌跡為一圓心在 O，半徑為 $\sqrt{2r^2-\overline{OS}^2}$ 之圓

同法可證，N', M', N 之軌跡亦皆為此圓

即 M, N', M', N 之軌跡為圓心在 O，半徑為 $\sqrt{2r^2-\overline{OS}^2}$ 的圓。

註：以上解法中都僅 M, M', N, N' 的軌跡在以 O 為圓心半徑 $\sqrt{2R^2-\overline{OS}^2}$ 的圓上（亦可用解析幾何求得），都應再說明（至少要提到）此圓上的每一點都會是某一個圓 O 上的點 A 依題意所作出矩形的一個頂點，如此解題品質更高，僅有少數學生提及此點，以下就是陳明揚同學的說明：



反之在以 O 為圓心，$\sqrt{2R^2-\overline{OS}^2}$ 為半徑的圓上任取一點 M''，連 $\overline{M''S}$，作以 $\overline{M''S}$ 為直徑的圓交圓 C 於兩點，如右圖取其中一點 B''，可知 $\angle M''B''S = 90°$

作$\overleftrightarrow{A''A'''}\perp\overline{B''B'''}$ ，交圓C於A'', A''' ，再作$\overline{M'''N''}\perp\overline{A''A'''}$ 交$\overline{A''A'''}$於A''

交$\overline{M''B''}$於$\overline{M''''}$ 。

由前面討論知 $\overline{OM''}=\overline{OM''''}$

$\therefore$ $\overline{M''}=\overline{M''''}$

依題意作法得 N''、M'''、N'''

可知$\angle M''N''M'''=\angle N''M'''N'''=\angle M'''N'''M''=90^\circ$

問題五 （本題是我國張鎮華教授所命的考題）

(1) 答案k 是4 。

(2) 先選$k=4$的函數$f:Z\to\{1,2,3,4\}$如下表：

Z :	…	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	…
f : ↓ $\{1,2,3,4\}$	…	4	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	1	…

且 $f(x+16)=f(x)$, $x\in Z$

易知：$f(x)$為週期16的函數且知惟有$|x-y|\leqslant 3$或$|x-y|\geqslant 13$才有可能使$f(x)=f(y)$，故當$|x-y|\in\{5,7,12\}$之x, $y\in Z$, $f(x)\neq f(y)$

故如此之f滿足問題之條件。

(3) 我們要證明$k\geqslant 4$。假設不對，則存在函數$f:Z\to\{1,2,3\}$，使對所有$|x-y|\in\{5,7,12\}$均滿足$f(x)\neq f(y)$。首先對任意整數x，考慮下列四個值：$f(x)$, $f(x-5)$, $f(x+7)$, $f(x+2)$，這四個值除了有可能$f(x)=f(x+2)$以外均相異，所以實際上$f(x)=f(x+2)$對所有整數x恆成立。

於是$f(x)=f(x+2)=f(x+4)=\cdots=f(x+10)=f(x+12)$

而$f(x)=f(x+12)$為矛盾。

★