中學生通訊解題第 108 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
10801

有 101 張紙牌分別標示 1 ~ 101 的數字(每張牌數字不同)，如果先抽掉其數字除以 5 餘 1 的牌。再將剩下的牌交由小華從數字小到大排列後，每次同時抽掉其數字為最大與最小的牌，重複以上抽牌動作，直到小華手上剩下兩張牌為止。試求小華最後剩下的兩張牌的數字乘積。

簡答：2600

參考解答：

首先拿走其數字除以 5 餘 1 的牌共計 21 張，剩餘 80 張數字為 $2,3,4,5,7,8,9,10\cdots,97,98,99,100$ 的牌如果每次都拿走其數字為最大與最小的牌，例如:(2,100),(3,99),(4,98),(5,97) …，則可歸納出每次取走兩張牌的數字，合計其數字和為 102。

因此可推理得：最後一次拿走的兩張牌的數字為中間數 50 與 52，所以數字乘積為 2600。

【解題評析】

本題屬於簡易的數論問題，由於即將到來的國中會考與特色招生中，數學考科均有非選擇題。其中特別強調數學的推理與論證能力。同學只需透過細緻的觀察數列的規律特性，找出適合的條件，加上計算與推導，即可獲得正確的結果。

問題編號
10802

(1) 設 x 不為 0，試就 x 的正負，討論 $x+\dfrac{1}{x}$ 的範圍。

(2) 試求 $\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}$ 的範圍。

(3) 二次函數 $f(x)=x^2+bx+c\ (b, c\in R)$ 的圖形與 x 軸有交點，若對於任意不為 0 的 x，都有 $f(x+\dfrac{1}{x})\geq 0$，且對於任意的 x，都有 $f(\dfrac{2x^2+3}{x^2+1})\leq 1$，試求 b, c 的值。

簡答：

(1) 當 $x>0$ 時，$x+\dfrac{1}{x}\geq 2$；當 $x<0$ 時，$x+\dfrac{1}{x}\leq -2$；

(2) $2<\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}\leq 3$　(3) $(b, c)=(-4, 4)$

參考解答：

(1) 當 $x>0$，

$$x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2-2x+1}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}\ge 0，$$

則 $x+\frac{1}{x}\ge 2$；

當 $x<0$，

$$x+\frac{1}{x}+2=\frac{x^2+2x+1}{x}=\frac{(x+1)^2}{x}\le 0，$$

則 $x+\frac{1}{x}\le -2$。

(2) $\frac{2x^2+3}{x^2+1}=2+\frac{1}{x^2+1}\Rightarrow 2<\frac{2x^2+3}{x^2+1}\le 3$。

(3) 由(1)及 $f(x+\frac{1}{x})\ge 0$，可知若 $|x|\ge 2$，

則 $f(x)\ge 0$，

二次函數的圖形與 x 軸有交點，所以對稱軸的位置在 $x=-2\sim x=2$ 之間，二次函數 $f(x)=x^2+bx+c\ (b,c\in R)$ 領導係數為 1，若兩個連續整數 $x=n,n+1$ 在軸的同一側或軸上時，$|f(n)-f(n+1)|\ge 1$，且等號成立時，有一個值恰好在軸上，

由 $f(2)\ge 0, f(3)\le 1$，且 $x=2, x=3$ 均在軸的同一側，

可知 $f(2)=0, f(3)=1$，且軸為 $x=2$，

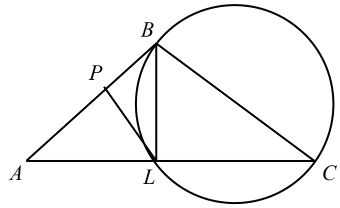
故可得 $(b,c)=(-4,4)$。

【解題評析】

這樣的題目主要是要探討求範圍的問題及二次函數的圖形，函數範圍的求取，可利用嘗試的方式，再利用減法證明，當然如果利用算幾不等式也可以，只是要注意算幾不等式的使用限制；二次函數的圖形，最重要的幾個特徵，像是與 x 軸的交點、軸的位置，都應該好好用心了解體會。

問題編號
10803

如圖所示，$\overline{BL}$ 是 $\angle ABC$ 的角平分線，過 L 作 ΔBCL 外接圓的切線，交 $\overline{AB}$ 於 P 點。試證明：$\overline{AC}$ 是 ΔBLP 外接圓的切線。



參考解答：

只需證明 $\angle PLA=\angle PBL$，即 $\angle ALP$ 為弦切角。

由於 $\overline{PL}$ 是 ΔBCL 外接圓的切線，故 $\angle PLB=\angle BCL$。

又 $\angle ALB=\angle LBC+\angle BCL$。而 $\angle ALB=\angle PLA+\angle PLB$。

又知 $\overline{BL}$ 平分 $\angle ABC$，因此 $\angle PLA=\angle LBC=\angle PBL$。

【解題評析】

同學在說明過程中使用圓周角與圓切角的相關性質，部份同學使用到圓冪性質，使用不同的方式，說明過程合理，故皆得滿分。

問題編號
10804

已知四位數 n 滿足下列兩個條件：(1) n 是 5 的倍數；(2) n 之四個位數中恰有兩個相同，另外兩個不同。

譬如：1665。

試問：這樣的四位數 n 共有多少個？

簡答：752 個

參考解答：

由四位數 n 是 5 的倍數，可知 n 的個位數為 0 或 5。

(一) 個位數為 0 者：

(i) 相同二數字為 00 者，型如：ab00、a0b0，其中 a 為{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}其中之一，有 9 種可能；b 為 0、a 以外之另一數字，有 8 種可能，這類四位數共有 $2\times9\times8=144$ 個；

(ii) 相同二數字非 00 者，型如：aab0、aba0、baa0，a、b 為{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}其中之二，各有 9 種可能、8 種可能，這類四位數共有 $3\times9\times8=216$ 個；

(二) 個位數為 5 者：

(iii) 相同二數字為 00 者，型如：a005，其中 a 為{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9}其中之一，共有 8 種可能，這類四位數共有 8 個；

(iv) 相同二數字為 55 者，型如：ab55、a5b5、5ab5

前兩者，其中 a 為{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9}其中之一，共有 8 種可能；b 為 5、a 以外之另一數字，但 b 可能是 0，也有 8 種可能，

後者 a 為{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9}其中之一，有 9 種可能；b 為 a 以外之另一數字，有 8 種可能，這類四位數共有 $2\times8\times8+9\times8=200$ 個；；

(v) 相同二數字非 00 也非 55 者，型如：aa05、a0a5、aab5、aba5、baa5，其中 a 為{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9}其中之一，共有 8 種可能；b 為 0、5、a 以外之另一數字，有 7 種可能，這類四位數有 $2\times8+3\times8\times7=184$ 個。

綜合(i) (ii) (iii) (iv) (v)，

$144+216+8+200+184=752$，可知四位數 n 共有 752 個。

【解題評析】

本題是中間偏易的組合問題，主要難點在 0、5 二數字之排列限制與其他的數字之限制條件有異，而 0、5 二數字之排列方式亦不同，因此，同學必須適當分類，細心討論才能得到正確的答案。

本題除如以上詳解正面分類討論外，亦可先摒除各數字間之不同限制條件，先探問所有排列個數，再扣除其中不合記數法規定者以求解，簡述如下：

個位數為 0 或 5，以 x 代，如 abxx、axbx、xabx 或 aabx、abax、baax，

共有 $2\times(3\times9\times8+3\times9\times8)=864$；

個位數為 0 或 5，千位數排 0 者，如 0ab0、00a5、0a05、05a5、0a55、0aa5，共有 $9\times 8+8+8+8+8+8=112$，

因此，四位數 n 共有 $864-112=752$ 個。

類此，利用扣除法解題，有時可以適當裁剪枝葉，免除複雜分類，使得解題脈絡較為簡易、清晰，提供同學參考。

問題編號
10805

設 $100!=1\times 2\times\cdots\times 100=7^m n$，其中 m，n 皆為正整數且 7 不為 n 之因數。
試求正整數 n 除以 7 之餘數。

簡答：4

參考解答：

由於 $m=\left[\frac{100}{7}\right]+\left[\frac{100}{49}\right]=16$，從而

$n=\frac{100!}{7^{16}}$。因為

$$100!=(1\times 2\times\cdots\times 6)(7\times 1)(8\times 9\times\cdots\times 13)(7\times 2)\times\cdots\times(92\times 93\times\cdots\times 97)(7\times 14)(7\times 14)\times 99\times 100$$

所以

$$n=\frac{100!}{7^{16}}\equiv(6!)^{14}\frac{14!\times 99\times 100}{7^2}(\bmod 7)$$

$$=(6!)^{14}\frac{(1\times\cdots\times 6)\times 7\times(8\times\cdots\times 13)\times 14\times 99\times 100}{7^2}(\bmod 7)$$

$$\equiv(6!)^{16}\times 4\quad(\bmod 7)$$

$\equiv 4(\bmod 7)$（由於 $6!\equiv -1\pmod 7$）。

【解題評析】

一部分的同學數學式的表達有些問題，並無法把自己的想法交代清楚，需要再加強。另一部分同學發生的錯誤在於只計算了

$(1\times 2\times\cdots\times 6)(8\times 9\times\cdots\times 13)\times\cdots\times(92\times 93\times\cdots\times 97)\times 99100$

除以 7 之餘數，但是實際上，

$(7\times 1)\times(7\times 2)\times\cdots\times(7\times 14)$
$=7^{16}(1\times 2\times\cdots\times 6)\times 1\times(8\times 9\times\cdots 13)\times 2$

這部分是還要計算的。