以均差運算列表法及函數圖形平移法求取多項式函數(上)

李輝濱

嘉義市私立輔仁中學退休教師

壹、前言

均差(Divided differences)是指在函數裡（某兩個函數值的差）與其（對應輸入元素的差）的比值，是函數在某一區間內的平均變化率的測度。

若 $n+1$ 個已知數據點給出的 n 次函數為 $y=f(x)=\sum_{t=0}^{n}a_t x^t$，其各數據點依序排列為：$(x_0,f(x_0)),(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2)),\ \cdots\ ,(x_{n-1},f(x_{n-1})),(x_n,f(x_n))$ 此 $n+1$ 個數據點的均差 (Divided differences) 運算可以寫成下列型式：

$$f[x_i]=f(x_i)\quad\Leftrightarrow\quad[y_i]=y_i\qquad i\in\{0,1,2,3,\ \cdots\ ,n\}\ ,$$

$$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_{i+j-1},x_{i+j}]=\frac{f[x_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_{i+j}]-f[x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+j-1}]}{x_{i+j}-x_i}$$

$$,\quad i\in\{0,1,2,3,\ \cdots\ ,n-j\}\ ,\quad j\in\{1,2,3,\ \cdots\ ,n\}$$

若取定 $i=0$，則每一階第 1 項的詳細均差運算式必可表達成下列型式；

0 階運算：$[y_0]=f(x_0)=y_0$

1 階運算：$$[y_0,y_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{y_0}{x_0-x_1}+\frac{y_1}{x_1-x_0}$$

2 階運算：$$[y_0,y_1,y_2]=\frac{[y_1,y_2]-[y_0,y_1]}{x_2-x_0}=\frac{\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$$

$$=\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

3 階運算：$$[y_0,y_1,y_2,y_3]=\frac{[y_1,y_2,y_3]-[y_0,y_1,y_2]}{x_3-x_0}=\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+$$

$$\frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{y_3}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots$$

n 階運算： $[y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n] = \dfrac{[y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n] - [y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}]}{x_n - x_0}$

$= \sum_{u=0}^{n} \dfrac{y_u}{\prod_{k=0,k\neq u}^{n} (x_u - x_k)}$

自第 2 階以後就看到了一連串的遞回除法過程，為了使關聯的層層計算過程更加清楚，特以橫向表列形式來展示原型的均差演算過程與結果，詳情表列如下；

x：	x_0	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
y：	$[y_0]=y_0$	$[y_1]=y_1$	$[y_2]=y_2$	$[y_3]=y_3$	$\cdots$	$[y_{n-2}]=y_{n-2}$	$[y_{n-1}]=y_{n-1}$	$[y_n]=y_n$
1 階	$[y_0, y_1]$	$[y_1, y_2]$	$[y_2, y_3]$	$\cdots$	$[y_{n-2}, y_{n-1}]$	$[y_{n-1}, y_n]$		
2 階	$[y_0, y_1, y_2]$	$[y_1, y_2, y_3]$	$[y_2, y_3, y_4]$	$\cdots$	$[y_{n-2}, y_{n-1}, y_n]$			
3 階	$[y_0, y_1, y_2, y_3]$	$\cdots$	$[y_{n-3}, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n]$					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$						
n 階	$[y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n]$							

針對已給定數據點先做均差運算並編製出其原型的均差計算表，在這原型的均差運算表內無法直接尋獲滿足所有已知數據點的多項式函數，必須再運用著名的 牛頓 (Isaac Newton)插值多項式法 或 拉格朗日 (Joseph-Louis Lagrange)的插值公式法才能計算出此函數。兩者都需要就已知數據值先列出各相異多項式連乘積的線性組合運算式，再展開連乘積作計算整理，最後重組成依次數由高而低順序排列、整式結構分佈的多項式函數。插值多項式的相關問題可在參考文獻中分別參閱蔡聰明(2010，2016)、及 R. Goldman, M. Kaufmann. (2002)等資料。

本文要提出新思維的另類分析操作法； [1].對滿足已給定數據點的多項式函數 $y = f(x) = \sum_{t=0}^{n} a_t x^t$ 先做出其橫式的均差運算表。[2].接下來的思維是：若數據點裡無 $(0, a_0)$這個點，則要將原多項式函數 y 的各數據點依序同步變換為： $(0, g(0)), (v_1, g(v_1)), (v_2, g(v_2)), \cdots, (v_{n-1}, g(v_{n-1})), (v_n, g(v_n))$，使 $v_0 = 0 = x_0 - x_0$ ， $v_i = x_i - x_0$ $(0 \le i \le n)$ ，且 $g(v_i) = y_i = f(x_i)$ ，形成一新構的試驗性多項式函數 $z = g(v) = \sum_{t=0}^{n} b_t v^t$ 。再編製出此試驗性多項函數 $z = g(v) = \sum_{t=0}^{n} b_t v^t$ 橫式的均差運算表。[3].接著，對此 $z = g(v) = \sum_{t=0}^{n} b_t v^t$ 多項函數逐次分別做出其降 1 次數的 $n-1$ 次多項函數 $p_1 = p_1(v) = \sum_{t=1}^{n} b_t v^{t-1}$ 均差運算表，降 2 次數的 $n-2$ 次多項函數 $p_2 = p_2(v) = \sum_{t=2}^{n} b_t v^{t-2}$

均差運算表，……，直到降 $n-3$ 次數的 3 次多項函數 $p_{n-3}=\sum_{t=0}^{3} b_{t+n-3}v^t$ ，降 $n-2$ 次數的 2 次多項函數 $p_{n-2}=\sum_{t=0}^{2} b_{t+n-2}v^t$ ，及降 $n-1$ 次數的 1 次多項函數 $p_{n-1}=b_n v+b_{n-1}$ 等各級均差運算表；在這編製完成的均差運算表中可清楚地看見所有表
列中 z 列與各 p_i 列的第 1 項位置處都有一個常數。直接取出這些常數值就可組合成以假設的虛擬數據點 $(0,b_0)$ 為首的 $n+1$ 個數據點(v_i , $f(v_i)$)所屬的試驗性多項式函數 $z=g(v)=\sum_{t=0}^{n} b_t v^t$ ！此一試驗性多項式函數並不是滿足已給定數據點(x_i , $f(x_i)$)的正確多項式函數。[4]. 最後，再將這個初探的試驗性多項式函數 $z=g(v)=\sum_{t=0}^{n} b_t v^t$ 以函數圖形平移法作轉換而還原成滿足已知初始數據點(x_i , $f(x_i)$)的正確原型多項式函數 $y=f(x)=\sum_{t=0}^{n} a_t x^t$ 。

貳、本文

做出每一份均差運算表，及由原型運算表中各階第 1 位置數字所構建成多項式函數的演繹分析推理流程中必頻繁的需要應用到下列 2 個基本性質----引理，以作為承續鋪陳理論的橋樑，增益印證主題的功能；

一、數學基本性質

引理 1. $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+y\cdot x^{n-2}+y^2x^{n-3}+\cdots+y^{n-3}x^2+y^{n-2}\cdot x+y^{n-1})$ (L1)

[證明]：略。

引理 2. (牛頓插值法) 每一個一元 n 次多項式函數 $f(x)$ 都可表成

$$f(x)=[y_0]+[y_0,y_1](x-x_0)+[y_0,y_1,y_2](x-x_0)(x-x_1)+[y_0,y_1,y_2,y_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\cdots+[y_0,y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-2})+[y_0,y_1,y_2,\cdots,y_n](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1}) \quad \text{(L2)}$$

[證明]：利用多項式的除法定理或由餘式定理，可逐步推演下列運作程序；

(1) 先做出 0 次多項函數：取 $f_0(x)=a_0=y_0=q_0(x)$ ，此為通過(x_0 , $f(x_0)$)點的常數函數。它是 0 次多項函數。

(2) 做出 1 次多項函數：取 1 次多項函數 $q_1(x)$ 使其通過(x_0 , 0)點，由因式定理，可令 $q_1(x)=a_1(x-x_0)$ ，於是有 1 次多項函數 $f_1(x)$ ，使構成 $f_1(x)=q_0(x)+q_1(x)=a_0+a_1(x-x_0)$ ，並通過(x_0 , $f(x_0)$)點。再讓 $f_1(x)$ 通過(x_1 , $f(x_1)$)點，則 $a_1=\dfrac{f_1(x_1)-a_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=[y_0,y_1]$ ，因此有 $f_1(x)=[y_0]+[y_0,y_1](x-x_0)$ 。

(3) 做出 2 次多項函數：取 2 次多項函數 $q_2(x)$ 使其通過(x_0 , 0)點與(x_1 , 0)點，再由因式定理，可令 $q_2(x)=a_2(x-x_0)(x-x_1)$，於是再有 2 次多項函數 $f_2(x)$，使構成 $f_2(x)$ $=f_1(x)+q_2(x)=[\,y_0\,]+[\,y_0,y_1\,](x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)$ 。再令 $f_2(x)$ 通過(x_2 , $f(x_2)$)點，則 $a_2=\dfrac{f_2(x_2)-[y_0]-[y_0,y_1](x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$

$$= \frac{(f_2(x_2)-f(x_1))-[y_0,y_1](x_2-x_0)+(f(x_1)-y_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{[y_1,y_2](x_2-x_1)-[y_0,y_1](x_2-x_0)+[y_0,y_1](x_1-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{[y_1,y_2](x_2-x_1)-[y_0,y_1](x_2-x_0-x_1+x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{[y_1,y_2](x_2-x_1)-[y_0,y_1](x_2-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{[y_1,y_2]-[y_0,y_1]}{x_2-x_0} = [\,y_0,y_1,y_2\,]$$

因此就得到 $f_2(x)=[\,y_0\,]+[\,y_0,y_1\,](x-x_0)+[\,y_0,y_1,y_2\,](x-x_0)(x-x_1)$ 。

(4) 仿效此方法持續做下去，直到 $n+1$ 個點都做完為止，最後將 $n+1$ 個多項函數 $q_k(x)$ 相加起來，即得到下列牛頓插值法的 n 次多項函數 $f(x)$ ；

$$\begin{aligned} f(x) = {} & [\,y_0\,]+[\,y_0,y_1\,](x-x_0)+[\,y_0,y_1,y_2\,](x-x_0)(x-x_1)+[\,y_0,y_1,y_2,y_3\,](x-x_0) \\ & (x-x_1)(x-x_2)+\cdots+[\,y_0,y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}\,](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-2}) \\ & +[\,y_0,y_1,y_2,\cdots,y_n\,](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1}) \end{aligned} \tag{L2}$$

二、以均差運算及逆推均差運算列表法直取初探的試驗性多項式函數

假設給定的 $n+1$ 個數據點依序排列為： $(x_0,f(x_0)),(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2)),\cdots,(x_{n-1},f(x_{n-1})),(x_n,f(x_n))$，滿足數據點的 n 次函數為 $y=f(x)=\sum_{t=0}^{n}a_tx^t$ ，若數據點裡無 $(0,a_0)$ 這個點，則應用上述引理 1.的關係式對多項式函數做各階均差運算，可逐一獲得；1 階運算：$[\,y_0,y_1\,]=\sum_{t=1}^{n}a_t(\sum_{i=0}^{t-1}x_0^{\,t-1-i}x_1^{\,i})$ ，2 階運算：$[\,y_0,y_1,y_2\,]=\sum_{t=2}^{n}a_t(\sum_{i+j+k=t-2}x_0^{\,i}x_1^{\,j}x_2^{\,k})$ ，3 階均差層層迭代運算：$[\,y_0,y_1,y_2,y_3\,]=\sum_{t=3}^{n}a_t(\sum_{i+j+k+l=t-3}x_0^{\,i}x_1^{\,j}x_2^{\,k}x_3^{\,l})$，⋯ ⋯ ，$n$ 階運算：$[\,y_0,y_1,y_2,\cdots,y_n\,]=a_n$ 等，將這些計算完成的運算式編製成下列的原型均差運算表：

A. 原型均差運算表

對 $y=f(x)=\sum_{t=0}^{n} a_t x^t$ 多項式函數作出橫式的完整原型均差運算表；

x： x_0　x_1　x_2　$\cdots$　x_{n-1}　x_n

y： $\sum_{t=0}^{n} a_t {x_0}^t$　$\sum_{t=0}^{n} a_t {x_1}^t$　$\sum_{t=0}^{n} a_t {x_2}^t$　$\ldots$　$\sum_{t=0}^{n} a_t {x_{n-1}}^t$　$\sum_{t=0}^{n} a_t {x_n}^t$

1 階： $\sum_{t=1}^{n} a_t (\sum_{i=0}^{t-1} {x_0}^{t-1-i} {x_1}^i)$　$\sum_{t=1}^{n} a_t (\sum_{i=0}^{t-1} {x_1}^{t-1-i} {x_2}^i)$　$\ldots$　$\sum_{t=1}^{n} a_t (\sum_{i=0}^{t-1} {x_{n-1}}^{t-1-i} {x_n}^i)$

2 階： $\sum_{t=2}^{n} a_t (\sum_{i+j+k=t-2} {x_0}^i {x_1}^j {x_2}^k)$　$\sum_{t=2}^{n} a_t (\sum_{i+j+k=t-2} {x_1}^i {x_2}^j {x_3}^k)$　$\cdots$

3 階： $\sum_{t=3}^{n} a_t (\sum_{i+j+k+l=t-3} {x_0}^i {x_1}^j {x_2}^k {x_3}^l)$　$\cdots$

4 階： $\sum_{t=4}^{n} a_t (\sum_{i+j+k+l+m=t-4} {x_0}^i {x_1}^j {x_2}^k {x_3}^l {x_4}^m)$　$\cdots$

$\vdots$　$\vdots$　$\vdots$

$n-2$ 階： $a_n(\sum_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-2}=2} {x_0}^{k_0} {x_1}^{k_1} {x_2}^{k_2} \cdots {x_{n-2}}^{k_{n-2}}) + a_{n-1}(\sum_{i=0}^{n-2} x_i) + a_{n-2}$　$\cdots$

$n-1$ 階： $a_n(\sum_{i=0}^{n-1} x_i) + a_{n-1}$　$a_n(\sum_{i=1}^{n} x_i) + a_{n-1}$

n 階： a_n

最末列 n 階出現的數字是 a_n，此 a_n 即為這多項式首項 n 次數係數的數值。

B. 新構的試驗性多項式函數

將原數據點($x, f(x)$)假設為新數據點($v, g(v)$)，使 $v_i = x_i - x_0 \quad (0 \le i \le n)$，且 $g(v_i) = y_i = f(x_i)$，形成一新構的試驗性多項式函數 $z=g(v)=\sum_{t=0}^{n} b_t v^t$，而 $b_n = a_n$。再編製出此試驗性多項式函數 $z=g(v)=\sum_{t=0}^{n} b_t v^t$ 橫式均差運算表，如下表：

v： 0　v_1　v_2　v_3　$\cdots$

z： b_0　$\sum_{t=0}^{n} b_t {v_1}^t$　$\sum_{t=0}^{n} b_t {v_2}^t$　$\sum_{t=0}^{n} b_t {v_3}^t$　$\cdots$

1 階： $\sum_{t=1}^{n} b_t {v_1}^{t-1}$　$\sum_{t=1}^{n} b_t (\sum_{i=0}^{t-1} {v_1}^{t-1-i} {v_2}^i)$　$\sum_{t=1}^{n} b_t (\sum_{i=0}^{t-1} {v_2}^{t-1-i} {v_3}^i)$　$\cdots$

2 階： $\sum_{t=2}^{n} b_t (\sum_{i=0}^{t-2} {v_1}^{t-2-i} {v_2}^i)$　$\sum_{t=2}^{n} b_t (\sum_{i+j+k=t-2} {v_1}^i {v_2}^j {v_3}^k)$　$\cdots$

3 階： $\sum_{t=3}^{n} b_t(\sum_{i+j+k=t-3} v_1{}^i v_2{}^j v_3{}^k)$ $\sum_{t=3}^{n} b_t(\sum_{i+j+k+l=t-3} v_1{}^i v_2{}^j v_3{}^k v_4{}^l)$

4 階： $\sum_{t=4}^{n} b_t(\sum_{i+j+k+l=t-4} v_1{}^i v_2{}^j v_3{}^k v_4{}^l)$

$\sum_{t=4}^{n} b_t(\sum_{i+j+k+l+m=t-4} v_1{}^i v_2{}^j v_3{}^k v_4{}^l v_5{}^m)$ $\cdots$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

$n-2$ 階： $b_n(\sum_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-3}=2} v_1{}^{k_0} v_2{}^{k_1} v_3{}^{k_2} \cdots v_{n-2}{}^{k_{n-3}}) + b_{n-1}(\sum_{i=1}^{n-2} v_i) + b_{n-2}$

$b_n(\sum_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-2}=2} v_1{}^{k_0} v_2{}^{k_1} v_3{}^{k_2} \cdots v_{n-1}{}^{k_{n-2}}) + b_{n-1}(\sum_{i=1}^{n-1} v_i) + b_{n-2}$ $\cdots$

$n-1$ 階： $b_n(\sum_{i=1}^{n-1} v_i) + b_{n-1}$ $b_n(\sum_{i=1}^{n} v_i) + b_{n-1}$

n 階： b_n

注意到最末階是常數 b_n，以上操作出的橫式列表即完成了以數據點 $(0, b_0)$ 為首的試驗性多項式函數 n 次數 $z = g(v) = \sum_{t=0}^{n} b_t v^t$ 原型均差運算表。而 $b_n = a_n$ 。

事實上，這個 $z = g(v) = \sum_{t=0}^{n} b_t v^t$ 原型均差運算表內的數字資料與前述在 A.節的 $y = f(x) = \sum_{t=0}^{n} a_t x^t$ 原型均差運算表內的數字資料完全相同，除了兩者在第 1 列的 x 值與 v 值不相同外。所以，就用 $z = g(v) = \sum_{t=0}^{n} b_t v^t$ 原型均差運算表取代之。

C. 作出 $z = g(v) = \sum_{t=0}^{n} b_t v^t$ 各降級次數多項式函數的橫式均差運算表

C1. 作出降 1 次數的 $p_1 = p_1(v) = \sum_{t=1}^{n} b_t v^{t-1}$ 多項式函數的均差運算表，如下；

v： 0 v_1 v_2 v_3 $\cdots$

p_1： b_1 $\sum_{t=1}^{n} b_t v_1{}^{t-1}$ $\sum_{t=1}^{n} b_t v_2{}^{t-1}$ $\sum_{t=1}^{n} b_t v_3{}^{t-1}$ $\cdots$

1 階： $\sum_{t=2}^{n} b_t v_1{}^{t-2}$ $\sum_{t=2}^{n} b_t(\sum_{i=0}^{t-2} v_1{}^{t-2-i} v_2{}^i)$ $\sum_{t=2}^{n} b_t(\sum_{i=0}^{t-2} v_2{}^{t-2-i} v_3{}^i)$ $\cdots$

2 階： $\sum_{t=3}^{n} b_t(\sum_{i=0}^{t-3} v_1{}^{t-3-i} v_2{}^i)$ $\sum_{t=3}^{n} b_t(\sum_{i+j+k=t-3} v_1{}^i v_2{}^j v_3{}^k)$ $\cdots$

3 階： $\sum_{t=4}^{n} b_t(\sum_{i+j+k=t-4} v_1{}^i v_2{}^j v_3{}^k)$ $\sum_{t=4}^{n} b_t(\sum_{i+j+k+l=t-4} v_1{}^i v_2{}^j v_3{}^k v_4{}^l)$

$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

$n-3$階：

$$b_n\Big(\sum_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-4}=2} {v_1}^{k_0}{v_2}^{k_1}{v_3}^{k_2}\cdots{v_{n-3}}^{k_{n-4}}\Big)+b_{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n-3}v_i\Big)+b_{n-2}$$

$$b_n\Big(\sum_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-3}=2} {v_1}^{k_0}{v_2}^{k_1}{v_3}^{k_2}\cdots{v_{n-2}}^{k_{n-3}}\Big)+b_{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n-2}v_i\Big)+b_{n-2}$$

$n-2$階：　$b_n(\sum_{i=1}^{n-2}v_i)+b_{n-1}$　　$b_n(\sum_{i=1}^{n-1}v_i)+b_{n-1}$

$n-1$階：　b_n　　b_n

C2. 作降 2 次數的 $p_2=p_2(v)=\sum_{t=2}^{n}b_tv^{t-2}$ 多項式函數的均差運算表，如下；

v：　0　　v_1　　v_2　　v_3　　$\cdots$

p_2：　b_2　　$\sum_{t=2}^{n}b_t{v_1}^{t-2}$　　$\sum_{t=2}^{n}b_t{v_2}^{t-2}$　　$\sum_{t=2}^{n}b_t{v_3}^{t-2}$　　$\cdots$

1 階：　$\sum_{t=3}^{n}b_t{v_1}^{t-3}$　　$\sum_{t=3}^{n}b_t(\sum_{i=0}^{t-3}{v_1}^{t-3-i}{v_2}^{i})$　　$\sum_{t=3}^{n}b_t(\sum_{i=0}^{t-3}{v_2}^{t-3-i}{v_3}^{i})$　　$\cdots$

2 階：　$\sum_{t=4}^{n}b_t(\sum_{i=0}^{t-4}{v_1}^{t-4-i}{v_2}^{i})$　　$\sum_{t=4}^{n}b_t(\sum_{i+j+k=t-4}{v_1}^{i}{v_2}^{j}{v_3}^{k})$　　$\cdots$

3 階：　$\sum_{t=5}^{n}b_t(\sum_{i+j+k=t-5}{v_1}^{i}{v_2}^{j}{v_3}^{k})$　　$\sum_{t=5}^{n}b_t(\sum_{i+j+k+l=t-5}{v_1}^{i}{v_2}^{j}{v_3}^{k}{v_4}^{l})$

$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

$n-4$階：

$$b_n\Big(\sum_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-5}=2} {v_1}^{k_0}{v_2}^{k_1}{v_3}^{k_2}\cdots{v_{n-4}}^{k_{n-5}}\Big)+b_{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n-4}v_i\Big)+b_{n-2}$$

$$b_n\Big(\sum_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-4}=2} {v_1}^{k_0}{v_2}^{k_1}{v_3}^{k_2}\cdots{v_{n-3}}^{k_{n-4}}\Big)+b_{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n-3}v_i\Big)+b_{n-2}$$

$n-3$階：　$b_n(\sum_{i=1}^{n-3}v_i)+b_{n-1}$　　$b_n(\sum_{i=1}^{n-2}v_i)+b_{n-1}$

$n-2$階：　b_n　　b_n

C3. 持續作降 3 次數的 $n-3$次多項式函數 $p_3=p_3(v)=\sum_{t=3}^{n}b_tv^{t-3}$ 均差運算表；

v： 0 v_1 v_2 v_3 $\cdots$

p_3： b_3 $\sum_{t=3}^{n} b_t {v_1}^{t-3}$ $\sum_{t=3}^{n} b_t {v_2}^{t-3}$ $\sum_{t=3}^{n} b_t {v_3}^{t-3}$ $\cdots$

1 階： $\sum_{t=4}^{n} b_t {v_1}^{t-4}$ $\sum_{t=4}^{n} b_t (\sum_{i=0}^{t-4} {v_1}^{t-4-i} {v_2}^{i})$ $\sum_{t=4}^{n} b_t (\sum_{i=0}^{t-4} {v_2}^{t-4-i} {v_3}^{i})$ $\cdots$

2 階： $\sum_{t=5}^{n} b_t (\sum_{i=0}^{t-5} {v_1}^{t-5-i} {v_2}^{i})$ $\sum_{t=5}^{n} b_t (\sum_{i+j+k=t-5} {v_1}^{i} {v_2}^{j} {v_3}^{k})$ $\cdots$

3 階： $\sum_{t=6}^{n} b_t (\sum_{i+j+k=t-6} {v_1}^{i} {v_2}^{j} {v_3}^{k})$ $\sum_{t=6}^{n} b_t (\sum_{i+j+k+l=t-6} {v_1}^{i} {v_2}^{j} {v_3}^{k} {v_4}^{l})$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

$n-5$階： $b_n(\sum\limits_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-6}=2} {v_1}^{k_0} {v_2}^{k_1} {v_3}^{k_2} \cdots {v_{n-5}}^{k_{n-6}}) + b_{n-1}(\sum_{i=1}^{n-5} v_i) + b_{n-2}$

$b_n(\sum\limits_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-5}=2} {v_1}^{k_0} {v_2}^{k_1} {v_3}^{k_2} \cdots {x_{n-4}}^{k_{n-5}}) + b_{n-1}(\sum_{i=1}^{n-4} v_i) + b_{n-2}$

$n-4$階： $b_n(\sum_{i=1}^{n-4} v_i) + b_{n-1}$ $b_n(\sum_{i=1}^{n-3} v_i) + b_{n-1}$

$n-3$階： b_n b_n

C4. 持續作降 4 次數、降 5 次數、⋯、直到降 $n-3$次數的 $p_{n-3} = \sum_{t=0}^{3} b_{t+n-3} v^t$ ；

v： 0 v_1 v_2 v_3 $\cdots$

p_{n-3}： b_{n-3} $\sum_{t=0}^{3} b_{t+n-3} {v_1}^{t}$ $\sum_{t=0}^{3} b_{t+n-3} {v_2}^{t}$ $\sum_{t=0}^{3} b_{t+n-3} {v_3}^{t}$ $\cdots$

1 階： $\sum_{t=0}^{2} b_{t+n-2} {v_1}^{t}$ $\sum_{t=0}^{2} b_{t+n-2} (\sum_{i=0}^{t} {v_1}^{t-i} {v_2}^{i})$ $\sum_{t=0}^{2} b_{t+n-2} (\sum_{i=0}^{t} {v_2}^{t-i} {v_3}^{i})$ $\cdots$

2 階： $b_n(\sum_{i=1}^{2} v_i) + b_{n-1}$ $b_n(\sum_{i=1}^{3} v_i) + b_{n-1}$ $\cdots$

3 階： b_n b_n $\cdots$

C5. 持續作降 $n-2$次數的 2 次多項式函數 $p_{n-2} = \sum_{t=0}^{2} b_{t+n-2} v^t$ 均差運算表；

v： 0 v_1 v_2 v_3 $\cdots$

p_{n-2}： b_{n-2} $\sum_{t=0}^{2} b_{t+n-2} {v_1}^{t}$ $\sum_{t=0}^{2} b_{t+n-2} {v_2}^{t}$ $\sum_{t=0}^{2} b_{t+n-2} {v_3}^{t}$ $\cdots$

1 階：　$b_n v_1 + b_{n-1}$　$b_n(\sum_{i=1}^{2} v_i) + b_{n-1}$　$b_n(\sum_{i=2}^{3} v_i) + b_{n-1}$　$\cdots$

2 階：　b_n　b_n　$\cdots$

C6. 最終，再作出降 $n-1$ 次數的 1 次多項式函數 $p_{n-1} = b_n v + b_{n-1}$ 均差運算表；

v：　0　v_1　v_2　v_3　$\cdots$

p_{n-1}：　b_{n-1}　$b_n v_1 + b_{n-1}$　$b_n v_2 + b_{n-1}$　$b_n v_3 + b_{n-1}$　$\cdots$

1 階：　b_n　b_n　b_n　$\cdots$

C7. 從上述 B 節、C1 節、C2 節、⋯至 C6 節新作完成的所有均差運算表中可清楚地對照並看見 B 節運算表中 1 階、2 階、3 階、⋯、$n-2$ 階、$n-1$ 階、n 階等各階的第 1 項數值恰好成有秩序地逐一分別落在 C1 節運算表中 p_1 列、1 階、2 階、3 階、⋯、$n-3$ 階、$n-2$ 階、$n-1$ 階等各階的第 2 項位置處。同樣地，C1 節運算表中 1 階、2 階、3 階、⋯、$n-2$ 階、$n-1$ 階等各階的第 1 項數值恰好成有秩序地逐一分別落在 C2 節運算表中 p_2 列、1 階、2 階、3 階、⋯、$n-3$ 階、$n-2$ 階等各階的第 2 項位置處。同樣地，C2 節與 C3 節運算表、⋯、C4 節與 C5 節運算表、C5 節與 C6 節運算表等所有的相關對應情形也都是呈現出如此相同的迭代關係。所以，

根據這樣的關連結構就能以逆推均差運算法計算出每一 p_i 列的常數項，就是所有

係數 b_0、b_1、b_2、b_3、⋯、b_{n-2}、b_{n-1}、b_n 的值，因而直接得出新構的試驗性多項式函數 $z = g(v) = \sum_{t=0}^{n} b_t v^t$ 。

D. 以圖形平移法轉換還原成正確的原始多項式函數

現在要將此試驗性多項式函數 $z = g(v) = \sum_{t=0}^{n} b_t v^t$ 看成是以假設的虛擬數據點 (0, b_0)為首的 $n+1$ 個數據點所規範出的平面曲線多項式函數；然後，再將這個試驗性多項式函數以函數圖形平移法作轉換以還原成滿足已知數據點($x_i, f(x_i)$)的正確原始多項式函數 $y = f(x) = \sum_{t=0}^{n} a_t x^t$ 。由 $v_i = x_i - x_0$ $(0 \le i \le n)$，得 $x_i = v_i + x_0$ ，再將此試驗性多項式函數 $z = g(v) = \sum_{t=0}^{n} b_t v^t$ 以簡單的綜合除法作變換成 $z = g(v + x_0) = \sum_{t=0}^{n} a_t (v + x_0)^t$ ，再以 $x = v + x_0$ ，$y = f(x) = g(v + x_0) = z$ 代換之，而得到原來的適配多項式函數 $y = f(x) = \sum_{t=0}^{n} a_t x^t$ 。　【待續】