尋找出能使 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的有理數值相等的相異整數邊長 ΔABC

李輝濱

嘉義市私立輔仁高級中學退休教師

壹、前言

本研究的第一個目標是將 ΔABC 餘弦定理所表徵的 $\cos A+\cos B+\cos C$ 複雜型式改寫成較簡易的輪換式對稱性型態；使推演時能輕鬆快速地計算出其數值。

第二項目標是要找出使 $\cos A+\cos B+\cos C$ 有相等有理數值的整數邊長 ΔABC，並探討他們的性質。將 ΔABC 的各整數邊長 a,b,c 表述成三元數 $[a,b,c]$ 記號，則由 [1, 1, 1]、[2, 2, 2]、…、$[n,n,n]$ 等形式的所有正三角形其 $\cos A+\cos B+\cos C$ 計算值皆為 3/2，這種無限多的相異正三角形都有相等有理數值的情況太容易被尋獲了，普遍到隨手可得。還有任何 $[ka,kb,kc]$ 有公因數者與 $[a,b,c]$ 也都會有相等有理數值，接下來的討論就直接省略這種正三角形與有公因數者情況。

仔細計算將發現：當 a,b,c 三者互質，則具有相等有理數值的相異整數邊長 ΔABC 恰為成對的兩個三角形。當下嚴謹比對、分析這兩個相異三角形的邊長長度分佈 $[a,b,c]$ 與 $[k,m,n]$ 數據間的連結關聯性，竟然覺察到後者的任一邊長都是前者邊長的組合函數，如此的真確對應性質引致作者多方面的追蹤與探究，因而推論出各不同類型的關鍵運算準則，根據準則可將原型三元數 $[a,b,c]$ 成功地運算成相異的新型三元數 $[k,m,n]$，此準則提供了 k,m,n 的個別獨特生成公式，下文內容就是思考分析，推理運算並有秩序地演繹、綜合歸納的過程。

貳、預備知識

引理 1. 正弦定理與餘弦定理：

正弦定理：ΔABC 之各邊長 a,b,c，圖 1.，則 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，為 ΔABC 的外接圓半徑。

餘弦定理：圖 1. ΔABC 中有 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$ 關係式，也可寫成下式；

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\text{，另有}\quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\text{，}\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

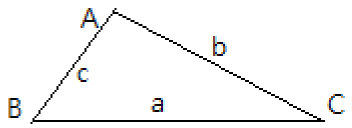

圖 1

證明：略。

引理 2. 三角恆等式： ΔABC的三個頂角 A,B,C 且 $A+B+C=\pi$ ，則

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

證明：略。

參、本文

A. 探討 $\cos A+\cos B+\cos C$ 為有理數值的整數邊長 ΔABC 之各邊長 a,b,c 關係

[A1].首先來描述 ΔABC的 $\cos A+\cos B+\cos C$ 與各整數邊長 a,b,c 關係式；由引理 1. 與圖 1.的餘弦定理知； $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ， $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ ， $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ，將三者角度與邊長連結的餘弦關係式依順序相加，得

$$\cos A+\cos B+\cos C = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-1+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-1+1$$

$$= \frac{b^2+c^2-a^2-2bc}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2+2ca}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2-2ab}{2ab}+1$$

$$= \frac{(b-c)^2-a^2}{2bc}+\frac{(c+a)^2-b^2}{2ca}+\frac{(a-b)^2-c^2}{2ab}+1$$

$$= \frac{(b-c-a)(b-c+a)}{2bc}+\frac{(c+a-b)(c+a+b)}{2ca}+\frac{(a-b-c)(a-b+c)}{2ab}+1$$

$$= (c+a-b)\cdot\left[-\frac{(b-c+a)}{2bc}+\frac{(c+a+b)}{2ca}+\frac{(a-b-c)}{2ab}\right]+1$$

$$= (c+a-b)\cdot\left[\ \frac{b(c+a+b)+c(a-b-c)-a(b-c+a)}{2abc}\ \right]+1$$

$$= (c+a-b)\cdot\left[\ \frac{b^2-(a-c)^2}{2abc}\ \right]+1 = \left[\ \frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{2abc}\ \right]+1$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}-1\right)\left(\frac{c+a}{b}-1\right)\left(\frac{a+b}{c}-1\right)+1$$

得； $$\cos A+\cos B+\cos C = \frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}-1\right)\left(\frac{c+a}{b}-1\right)\left(\frac{a+b}{c}-1\right)+1 \qquad (1)$$

方程式(1)式即為 $\cos A+\cos B+\cos C$ 與各整數邊長 a,b,c 的相連結關係式。

由(1)式知；只要是具整數邊長 a,b,c 的 ΔABC，將 a,b,c 值代入(1)式中，再運算，化簡出來的 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的值必是有理數值。事實上，從餘弦定理關係式的公式型態結構即可得知這性質。此處的推演，得證出的(1)式結果恰提供了 $\cos A+\cos B+\cos C$ 一個既簡潔又容易親近的新穎公式型式。

再由引理 2.與(1)式的比對，又經過運算，化簡也可得到下列新關係式 (2)式；

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{8}\left(\frac{b+c}{a}-1\right)\left(\frac{c+a}{b}-1\right)\left(\frac{a+b}{c}-1\right) \qquad (2)$$

所以，$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ 的值也必是有理數值。探討 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ 的性質時必會與 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的屬性完全相同，對照兩者公式結構誠屬類同有趣！

[A2]. 查驗 $\cos A+\cos B+\cos C$ 函數值的上界、下界：

(i) 察看引理 2.三角形中的 $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ 關係式，因 $A+B+C=\pi$，得 $0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}$ ，$0<\frac{B}{2}<\frac{\pi}{2}$ ，$0<\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $0<\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$，可得 $(\cos A+\cos B+\cos C)>1$ ，即下界大於 1 。

(ii) 由 $0<A<\pi$ ，$0<B<\pi$ ，可得 $0<\cos(\frac{A-B}{2})\le 1$ $\Rightarrow$ $\cos^2(\frac{A-B}{2})\le 1$ ，且 $\cos(\frac{A+B}{2}) = \cos(\frac{\pi-C}{2}) = \sin\frac{C}{2}$ ，則求取 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ 的極大值；

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}[\cos(\frac{A-B}{2})-\cos(\frac{A+B}{2})]\cdot\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}[\cos(\frac{A-B}{2})-\sin\frac{C}{2}]\sin\frac{C}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}[\sin^2\frac{C}{2}-\cos(\frac{A-B}{2})\cdot\sin\frac{C}{2}] = -\frac{1}{2}[\ \sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\cos(\frac{A-B}{2})\ ]^2+\frac{1}{8}\cos^2(\frac{A-B}{2})$$

$\le\frac{1}{8}\cos^2(\frac{A-B}{2})$ $\le\frac{1}{8}$ ，此處的 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{8}$ 是當 $\angle A=\angle B=\angle C=\frac{\pi}{3}$ 時 $\Rightarrow$

$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$，得上界為 3/2 。

(iii) 最後，由(i)與(ii)取交集，可知 $1<(\cos A+\cos B+\cos C) \le \frac{3}{2}$ 。

另解，由 $\cos A+\cos B+\cos C=\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}-1\right)\left(\frac{c+a}{b}-1\right)\left(\frac{a+b}{c}-1\right)+1$ (1)

對 ΔABC 言，其 $\left(\frac{b+c}{a}-1\right)>0$ ， $\left(\frac{c+a}{b}-1\right)>0$ ， $\left(\frac{a+b}{c}-1\right)>0$ ， 可得 $(\cos A+\cos B+\cos C)>1$ ，即下界大於 1。

由(1)式： $\cos A+\cos B+\cos C=\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}-1\right)\left(\frac{c+a}{b}-1\right)\left(\frac{a+b}{c}-1\right)+1$ 得

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{2abc}$$

$$=1+\frac{(\sqrt{b+c-a})(\sqrt{b+c-a})(\sqrt{c+a-b})(\sqrt{c+a-b})(\sqrt{a+b-c})(\sqrt{a+b-c})}{2abc} \quad (1.1)$$

對 ΔABC 言，其 $(b+c-a)>0$ ， $(c+a-b)>0$ ，$(a+b-c)>0$ ，即三角形的任意兩邊和必大於第三邊，再由算術幾何平均不等式知，可得以下 3 組不等式：

$$\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}=\left(\sqrt{b+c-a}\right)\cdot\left(\sqrt{c+a-b}\right)\le\frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{2}=c$$

$$\sqrt{(b+c-a)(a+b-c)}=\left(\sqrt{b+c-a}\right)\cdot\left(\sqrt{a+b-c}\right)\le\frac{(b+c-a)+(a+b-c)}{2}=b$$

$$\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}=\left(\sqrt{c+a-b}\right)\cdot\left(\sqrt{a+b-c}\right)\le\frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{2}=a$$

，將此 3 組不等式一起同時代入(1.1)式，再運算化簡，則得 $\cos A+\cos B+\cos C$

$$=1+\frac{(\sqrt{b+c-a})(\sqrt{b+c-a})(\sqrt{c+a-b})(\sqrt{c+a-b})(\sqrt{a+b-c})(\sqrt{a+b-c})}{2abc}\le 1+\frac{abc}{2abc}=\frac{3}{2},$$

因此，得到（$\cos A+\cos B+\cos C$） $\le \frac{3}{2}$ 。

最後，組合其上界、下界範圍為 $1<(\cos A+\cos B+\cos C) \le \frac{3}{2}$ 。

B. 尋找 $\cos A+\cos B+\cos C$ 具有相等有理數值的整數邊長 ΔABC

由(1)式可預知;只需將此 ΔABC 各整數邊長 a,b,c 逐一代入方程式內的主導連乘積式 $\left(\frac{b+c}{a}-1\right)\left(\frac{c+a}{b}-1\right)\left(\frac{a+b}{c}-1\right)$中，運算後即可得知其有理數值。以全面搜索、奮鬥不懈法窮舉 $[a,b,c]$ 的各三元數計算後，再比對歸納，推論出滿足 $\cos A+\cos B+\cos C$ 具有相等有理數值的整數邊長 ΔABC 類型；

[B1]. 第 1 類型：等邊三角形 $[n,n,n]$ 型，n 為正整數。

[B2]. 第 2 類型：相似三角形即 $[ka,kb,kc]$型，k為正整數，$a\ge b>c$或 $a>b\ge c$。

[B3]. 第 3 類型：等腰三角形 $[n,n,k]$型與 $[2n-k,n,n]$型成對且 $1\le k\le n-1$。

[證明存在性]：對等腰三角形 $[n,n,k]$言，代入(1)式中的連乘積式作運算，得；

$$\left(\frac{b+c}{a}-1\right)\left(\frac{c+a}{b}-1\right)\left(\frac{a+b}{c}-1\right)=\left(\frac{n+k}{n}-1\right)\left(\frac{k+n}{n}-1\right)\left(\frac{n+n}{k}-1\right)=\frac{k(2n-k)}{n^2}$$

對另一型等腰三角形 $[2n-k,n,n]$ 言，也代入(1)式中的連乘積式作運算，得；

$$\left(\frac{2n}{2n-k}-1\right)\left(\frac{3n-k}{n}-1\right)\left(\frac{3n-k}{n}-1\right)=\frac{k}{2n-k}\cdot\frac{2n-k}{n}\cdot\frac{2n-k}{n}=\frac{k(2n-k)}{n^2}$$

故得證出等腰三角形 $[n,n,k]$ 型與 $[2n-k,n,n]$ 型，k為正整數且 $1\le k\le n-1$，其 $\cos A+\cos B+\cos C$ 具有相等有理數值，而其有理數值為 $\dfrac{k(2n-k)}{2n^2}+1$。

現在繼續來觀察比對等腰三角形 $[n,n,k]$ 型與 $[2n-k,n,n]$ 型兩型各邊長位置之間的相連結關係，再搭配運算，分析整理而得出下列的 2 項關鍵運算準則；

(a) 第 1 個$[n,n,k]$型中的第 1 個數n需置於第 2 個$[2n-k,n,n]$型的第 3 個位置。

(b) 第 1 個$[n,n,k]$型的第 2 個數n與第 3 個數k兩者的差值$n-k$恰恰好等於第 2 個$[2n-k,n,n]$型的第 1 個數$2n-k$與第 2 個數n兩者的差值。

所以，依據這 2 項關鍵運算準則可將原來 $[n,n,k]$型的型態計算出具相等有理數值的另一個相異三元數。因此，假設這第 2 個相異三元數為 $[m,m-(n-k),n]$，特將 $[n,n,k]$型與 $[m,m-(n-k),n]$型分別代入(1)式中的連乘積式作運算，得；

$$\left(\frac{b+c}{a}-1\right)\left(\frac{c+a}{b}-1\right)\left(\frac{a+b}{c}-1\right)=\left(\frac{n+k}{n}-1\right)\left(\frac{k+n}{n}-1\right)\left(\frac{n+n}{k}-1\right)=\frac{k(2n-k)}{n^2}$$

與$$\left(\frac{b+c}{a}-1\right)\left(\frac{c+a}{b}-1\right)\left(\frac{a+b}{c}-1\right)=\left(\frac{m+k}{m}-1\right)\left[\frac{n+m}{m-(n-k)}-1\right]\left[\frac{2m-(n-k)}{n}-1\right]$$

由 $\dfrac{k(2n-k)}{n^2}=\left(\dfrac{m+k}{m}-1\right)\left[\dfrac{n+m}{m-(n-k)}-1\right]\left[\dfrac{2m-(n-k)}{n}-1\right]$，求解出$m$關係式；

$$\Rightarrow\ \frac{k(2n-k)}{n}=\frac{k}{m}\cdot\frac{2n-k}{m-(n-k)}\cdot[2m-2n+k]\quad\Rightarrow\quad n\cdot[2m-2n+k]=m\cdot[m+k-n]$$

$$\Rightarrow\quad m^2+(k-3n)\cdot m+2n^2-nk=0=[m-(2n-k)](m-n)\quad\Rightarrow$$

$m=2n-k$ 或 $m=n$ (此情況又重複回到原來的三元數)。故 $m=2n-k$。

如此得出第 2 個相異三元數為 $[m,m-(n-k),n]=[2n-k,n,n]$ 的存在類型。所以，此 2 項關鍵運算準則是 $\cos A+\cos B+\cos C$ 具有相等有理數值的必然結果。

[證明唯一性]：再以 $[2n-k,n,n]$為原型，仿效上述 2 項關鍵運算準則來尋覓下一個相異

三元數，設定其為 $[h,h,2n-k]$型，再透過計算找出這h的關係式；將 $[2n-k,n,n]$型與 $[h,h,2n-k]$型分別代入(1)式中的連乘積式作運算，得；

$$\left(\frac{b+c}{a}-1\right)\left(\frac{c+a}{b}-1\right)\left(\frac{a+b}{c}-1\right)=\left(\frac{h+2n-k}{h}-1\right)\left(\frac{2n-k+h}{h}-1\right)\left(\frac{2h}{2n-k}-1\right)$$

$$=\left(\frac{2n-k}{h}\right)\left(\frac{2n-k}{h}\right)\left(\frac{2h-2n+k}{2n-k}\right)=\frac{k(2n-k)}{n^2}\quad\Rightarrow\left(\frac{2h-2n+k}{h^2}\right)=\frac{k}{n^2}$$

$\Rightarrow\quad kh^2-2n^2h+n^2(2n-k)=0=[kh-n\cdot(2n-k)](h-n)\quad\Rightarrow$　得下列結果；

$$h=n\quad\text{或}\quad h=\frac{n\cdot(2n-k)}{k}$$

(i)　當 $h=n$，則 $[h,h,2n-k]=[n,n,2n-k]$，回復到 $[2n-k,n,n]$ 型。

(ii)　當 $h=\dfrac{n\cdot(2n-k)}{k}$，則 $[h,h,2n-k]=\left[\dfrac{n\cdot(2n-k)}{k},\dfrac{n\cdot(2n-k)}{k},2n-k\right]$，提出公因數 $\dfrac{2n-k}{k}$，得；$[h,h,2n-k]=\dfrac{2n-k}{k}[n,n,k]$，又回復到 $[n,n,k]$ 型。可見，不會再生成新的、額外的第 3 個相異三元數。因此，在第 3 類型的規範下僅存在 2 個相異三元數唯一確定。

所以，第 3 類型等腰三角形 $[n,n,k]$與 $[2n-k,n,n]$型，k為正整數且 $1\le k\le n-1$，使 $\cos A+\cos B+\cos C$ 具有相等有理數值，而其有理數值為 $\dfrac{k(2n-k)}{2n^2}+1$ 的各組恆常性質唯一存在。因此，同一有理數值可找到 2 個整數邊長相異等腰三角形。

例 1：[29, 29, 11]與[47, 29, 29] 成對的相等有理數值為 2199/1682。

[5, 5, 2]與[8, 5, 5] 的值為 33/25 。[10,10,7] 與 [13,10,10] 的值為 291/200。……，可以找到非常多的成對的等腰三角形三元數。

另外，第 3 類型還有一擬似型；此為 $[n,k,k]$與 $[k,k,2k-n]$型，k為正整數且 $(n/2)\le k\le n-1$。這可用 $[n,k,k]$與 $[p,p,n]$型並仿效上述方法求出p值，然後排列成三元數形式，再提出公因數d，整理而得 $[p,p,n]=d[k,k,2k-n]$。

例 2：由 [8, 7, 7]可算出 [7, 7, 6] 成對的相等有理數值為 73/49。

由[23, 16, 16]可算出[16, 16, 9] 成對的相等有理數值為 719/512。………

[B4].第 4 類型：3 整數邊長皆各不相等的三角形 $[a,b,c]$型與 $\left[\dfrac{c(a+b-c)}{b+c-a},\dfrac{b(c+a-b)}{b+c-a},\right.$

a]型成對，$a>b>c$，$\dfrac{c(a+b-c)}{b+c-a}$ 與 $\dfrac{b(c+a-b)}{b+c-a}$ 兩者可能皆是正整數或是有理數。

此成對的類型中有共同的 a 值，但 a 值位置不同。

現在要由 $[a,b,c]$型找出 $\left[\dfrac{c(a+b-c)}{b+c-a},\dfrac{b(c+a-b)}{b+c-a},a\right]$ 型：由所有計算出的數據中分析到成對相等有理數值的對應型為 $[p,p-(b-c),a]$型，p 為正整數。

將 $[a,b,c]$型與 $[p,p-(b-c),a]$型代入連乘積式中，要得到相等值並求出 p；

(I) 將 $[a,b,c]$ 型代入，得； $\left(\dfrac{b+c}{a}-1\right)\left(\dfrac{c+a}{b}-1\right)\left(\dfrac{a+b}{c}-1\right)$

(II) 將 $[p,p-(b-c),a]$ 型代入連乘積式中，得；

$$\left[\frac{p-(b-c)+a}{p}-1\right]\left[\frac{a+p}{p-(b-c)}-1\right]\left[\frac{2p-(b-c)}{a}-1\right]=\frac{c+a-b}{p}\ \frac{a+b-c}{p-(b-c)}\ \frac{2p-(b-c)-a}{a}$$

(III) 由 $\left(\dfrac{b+c}{a}-1\right)\left(\dfrac{c+a}{b}-1\right)\left(\dfrac{a+b}{c}-1\right)=\dfrac{c+a-b}{p}\cdot\dfrac{a+b-c}{p-(b-c)}\cdot\dfrac{2p-(b-c)-a}{a}$

$$\Rightarrow\qquad \frac{b+c-a}{bc}=\frac{2p-b+c-a}{p(p-b+c)}=\frac{2p-b+c-a}{p^2-(b-c)p}\qquad\Rightarrow$$

$$(b+c-a)[p^2-(b-c)p]=bc\cdot(2p-b+c-a)\qquad\Rightarrow$$

$$(b+c-a)\ p^2-[2bc+(b+c-a)(b-c)]\cdot p+bc\cdot(a+b-c)=0\qquad\Rightarrow$$

$$[(b+c-a)\ p-c(a+b-c)](\ p-b\ )=0$$

得 $p=\dfrac{c(a+b-c)}{b+c-a}$ 或 $p=b$ ；

當取 $p=b$ ，得 $[p,p-(b-c),a]=[b,c,a]$，此時回到原 $[a,b,c]$型，重複了。

當取 $p=\dfrac{c(a+b-c)}{b+c-a}$ ，得 $p-(b-c)=\dfrac{b(c+a-b)}{b+c-a}$ ，因此真確找到$[p,p-(b-c),a]$ $=\left[\dfrac{c(a+b-c)}{b+c-a},\dfrac{b(c+a-b)}{b+c-a},a\right]$ 型相異於 $[a,b,c]$型，使得與原 $[a,b,c]$型兩者都讓 $\cos A+\cos B+\cos C$ 具有相等的有理數值。

[存在性證明]： 將$[a,b,c]$型與 $\left[\dfrac{c(a+b-c)}{b+c-a},\dfrac{b(c+a-b)}{b+c-a},a\right]$型代入連乘積式中，

(I) 將 $[a,b,c]$ 型代入，得； $\left(\dfrac{b+c}{a}-1\right)\left(\dfrac{c+a}{b}-1\right)\left(\dfrac{a+b}{c}-1\right)$

(II) 將 $\left[\dfrac{c(a+b-c)}{b+c-a},\dfrac{b(c+a-b)}{b+c-a},a\right]$ 型代入連乘積式中，得；

$$\left[\frac{\dfrac{b(c+a-b)}{b+c-a}+a}{\dfrac{c(a+b-c)}{b+c-a}}-1\right]\left[\frac{a+\dfrac{c(a+b-c)}{b+c-a}}{\dfrac{b(c+a-b)}{b+c-a}}-1\right]\left[\frac{\dfrac{c(a+b-c)}{b+c-a}+\dfrac{b(c+a-b)}{b+c-a}}{a}-1\right]$$

$$=\frac{c^2-(a-b)^2}{c(a+b-c)}\cdot\frac{b^2-(a-c)^2}{b(c+a-b)}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{a(b+c-a)}=\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{abc}$$

$$=\left(\frac{b+c}{a}-1\right)\left(\frac{c+a}{b}-1\right)\left(\frac{a+b}{c}-1\right)$$

由比較(I)與(II)的結果知；兩者完全相等。

得證出 $[a,b,c]$型與 $\left[\dfrac{c(a+b-c)}{b+c-a},\dfrac{b(c+a-b)}{b+c-a},a\right]$型都有相等有理數值。以上再由比對數據而歸納出此類型受規範的2項關鍵運算準則，如下列敘述；

(a) 第1個$[a,b,c]$型中的第1個數a 需置於第2個$[s,t,a]$型的第3個位置。

(b) 第1個$[a,b,c]$型的第2個數b 與第3個數c兩者的差值$b-c$恰恰好等於第2個$[s,t,a]$型的第1個數s 與第2個數t 兩者的差值$s-t$ 。$s-t = b-c$。這2項關鍵運算準則也是使 $\cos A+\cos B+\cos C$ 具有相等有理數值的必然結果。

[唯一性證明]：再以 $\left[\dfrac{c(a+b-c)}{b+c-a},\dfrac{b(c+a-b)}{b+c-a},a\right]$為原型，遵循上述2項關鍵運算準則來尋覓下一個相異三元數，設定其為 $\left[x,y,\dfrac{c(a+b-c)}{b+c-a}\right]$型，再透過計算找出這$x$與$y$的個別關係式；為了簡化演算書寫過程，特令 $\Omega=\dfrac{c(a+b-c)}{b+c-a}$ 與 $\Psi=\dfrac{b(c+a-b)}{b+c-a}$ ，$x-y=\dfrac{b(c+a-b)}{b+c-a}-a=\Psi-a$，即以 $\left[\dfrac{c(a+b-c)}{b+c-a},\dfrac{b(c+a-b)}{b+c-a},a\right]=[\Omega,\Psi,a]$ 為原型，來尋覓下一個相異三元數 $\left[x,y,\dfrac{c(a+b-c)}{b+c-a}\right]=[x,x-(\Psi-a),\Omega]$型，所以，要解出此$x$的個別關係式值，詳細運算流程如下；

(I) 將 $[x,x-(\Psi-a),\Omega]$型代入(1)式中的連乘積式中，得；

$$(1)\text{式中的連乘積式}=\frac{[x-(\Psi-a)+\Omega-x][\Omega+x-x+(\Psi-a)][x+x-(\Psi-a)-\Omega]}{x\cdot[x-(\Psi-a)]\cdot\Omega}$$

$$=\frac{(\Omega-\Psi+a)(\Omega+\Psi-a)(2x-\Psi+a-\Omega)}{x\cdot(x-\Psi+a)\cdot\Omega}=\frac{(\Psi+a-\Omega)(a+\Omega-\Psi)(\Omega+\Psi-a)}{\Omega\Psi a}\quad\Rightarrow$$

$$\frac{(2x-\Psi+a-\Omega)}{x\cdot(x-\Psi+a)} = \frac{(\Psi+a-\Omega)}{\Psi a} \tag{3}$$

(II) 要解出上列等式 (3)式中的 x；得

$$\Psi a\cdot(2x-\Psi+a-\Omega\ )=x\cdot(x-\Psi+a)\ (\Psi+a-\Omega) \qquad \Rightarrow$$

$$2\Psi ax-\Psi a\cdot(\Psi-a+\Omega)=[x^2-(\Psi-a)\cdot x](\Psi+a-\Omega) \qquad \Rightarrow$$

$$(\Psi+a-\Omega)\ x^2-[\ (\Psi-a)(\Psi+a-\Omega)+2\Psi a\ ]\ x+\Psi a\cdot(\Psi-a+\Omega)\ =0 \qquad \Rightarrow$$

$$(\Psi+a-\Omega)\ x^2-[\ \Psi^2-\Psi\Omega-a^2+\Omega a+2\Psi a\ ]\ x+\Psi a\cdot(\Psi-a+\Omega)\ =0 \qquad \Rightarrow$$

$$(x-\Psi)\cdot[(\Psi+a-\Omega)x-a(\Psi-a+\Omega)]\ =0$$

得 $x = \Psi$ 或 $x = \dfrac{a\cdot(\Psi-a+\Omega)}{\Psi+a-\Omega}$

(i) 當 $x = \Psi$ ，則 $[\,x, x-(\Psi-a), \Omega] = [\,\Psi, a, \Omega]$，回復到 $[\,\Omega\ ,\Psi, a]$型。

(ii) 當 $x = \dfrac{a\cdot(\Psi-a+\Omega)}{\Psi+a-\Omega}$ ，則 $[\,x, x-(\Psi-a), \Omega]$ 中的第 2 數 $x-(\Psi-a)=$

$$\frac{a\cdot(\Psi-a+\Omega)}{\Psi+a-\Omega}-(\Psi-a) = \frac{a\Psi-a^2+a\Omega-\Psi^2-a\Psi+\Psi\Omega+a\Psi+a^2-a\Omega}{\Psi+a-\Omega}$$

$$= \frac{a\Psi-\Psi^2+\Psi\Omega}{\Psi+a-\Omega} = \frac{\Psi(a+\Omega-\Psi)}{\Psi+a-\Omega} \qquad \Rightarrow$$

所以，得 $[\,x, x-(\Psi-a), \Omega]= [\,\dfrac{a\cdot(\Psi-a+\Omega)}{\Psi+a-\Omega}, \dfrac{\Psi(a+\Omega-\Psi)}{\Psi+a-\Omega}, \Omega]$

$$= \frac{1}{\Psi+a-\Omega}[\,a\cdot(\Omega+\Psi-a),\ \Psi(a+\Omega-\Psi),\ \Omega\cdot(\Psi+a-\Omega)\,] \tag{4}$$

現在要查清楚上列等式 (4)式中的三元數真正原始內涵；

(f1). $(\Omega+\Psi-a) = \dfrac{c(a+b-c)}{b+c-a}+\dfrac{b(c+a-b)}{b+c-a}-a$

$$= \frac{1}{b+c-a}[\ ca+cb-c^2+bc+ab-b^2-ab-ac+a^2\ ]$$

$$= \frac{1}{b+c-a}[\ a^2-(b-c)^2\ ] = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{b+c-a} \tag{4-1}$$

(f2). 同理，得 $(a+\Omega-\Psi) = (a+b-c)$ (4-2)

(f3). 同理，得 $(\Psi+a-\Omega) = (c+a-b)$ (4-3)

找到了！ 再將 (4-1)式、(4-2)式、(4-3)式、一起同步代入 (4)式中，得

$[\,x, x-(\Psi-a), \Omega] =$

$$\frac{1}{c+a-b}\left[\frac{a(a+b-c)(a-b+c)}{b+c-a}\ ,\ \frac{b(c+a-b)(a+b-c)}{b+c-a}\ ,\ \frac{c(a+b-c)(c+a-b)}{b+c-a}\right]$$

$$=\left[\frac{a(a+b-c)}{b+c-a}\ ,\ \frac{b(a+b-c)}{b+c-a}\ ,\ \frac{c(a+b-c)}{b+c-a}\right]\ =\ \frac{(a+b-c)}{(b+c-a)}[a,b,c] \qquad (5)$$

(5)式的結果又回復到 $[a,b,c]$ 的倍數型，也等同 $[a,b,c]$型。可見，不會再生成第 3 個相異三元數。因此，僅存在成對的 2 個相異三元數唯一確定。 所以，此第 4 類型 3 邊長皆各不相等三角形 $[a,b,c]$型與 $\left[\frac{c(a+b-c)}{b+c-a},\frac{b(c+a-b)}{b+c-a},a\right]$型成對，$a>b>c$，使 $\cos A+\cos B+\cos C$ 具有相等有理數值，而其有理數值為 $\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}-1\right)\left(\frac{c+a}{b}-1\right)\left(\frac{a+b}{c}-1\right)+1$ 的各組成對性質唯一存在。

因為 $a>b>c$，得 $(a+b-c)>(b+c-a)$ 且 $(c+a-b)>(b+c-a)$，$[a,b,c]$型與 $\left[\frac{c(a+b-c)}{b+c-a},\frac{b(c+a-b)}{b+c-a},a\right]$型完全相異。另外，由 $\frac{c(a+b-c)}{b+c-a}-a=\frac{(a-c)(a+c-b)}{b+c-a}\neq 0$ 且 $\frac{b(c+a-b)}{b+c-a}-a=\frac{(a-b)(a+b-c)}{b+c-a}\neq 0$，故 $\frac{c(a+b-c)}{b+c-a}\neq\frac{b(c+a-b)}{b+c-a}\neq a$，得出此 $\frac{c(a+b-c)}{b+c-a},\frac{b(c+a-b)}{b+c-a},a$等 3 個數也相異。因此，在第 4 類型的 2 項關鍵運算準則規範下同一有理數值可找到成對的 2 個整數邊長相異三角形 ΔABC。

[討論]：$[a,b,c]$型與 $\left[\frac{c(a+b-c)}{b+c-a},\frac{b(c+a-b)}{b+c-a},a\right]$型成對，第 2 型繼續推演得；

$$\left[\frac{c(a+b-c)}{b+c-a},\frac{b(c+a-b)}{b+c-a},a\right]=\frac{1}{b+c-a}[c(a+b-c),\ b(c+a-b),\ a(b+c-a)]$$

(g1). 若 $(b+c-a)=1$， 則

$$\left[\frac{c(a+b-c)}{b+c-a},\frac{b(c+a-b)}{b+c-a},a\right]=[c(a+b-c),\ b(c+a-b),\ a]$$

(g1-2). $c(a+b-c)$，$b(c+a-b)$，a 三者若有公因數，再算出三者互質的解。

(g2). 若 $(b+c-a)=\lambda>1$， 則

$$\left[\frac{c(a+b-c)}{b+c-a},\frac{b(c+a-b)}{b+c-a},a\right]=\frac{1}{\lambda}[c(a+b-c),\ b(c+a-b),\ a\lambda]$$

可能有；(g2-1). $c(a+b-c)$，$b(c+a-b)$，$a\lambda$ 三者互質，即為其解。

(g2-2). $c(a+b-c)$，$b(c+a-b)$，$a\lambda$ 三者若有公因數，再算出三者互質的解。

(g3). 當 $[\ \dfrac{c(a+b-c)}{b+c-a}, \dfrac{b(c+a-b)}{b+c-a}, a\ ]$型內元素出現非正整數時，只需對整體提出適當有理數而得到 $[\ \dfrac{c(a+b-c)}{b+c-a}, \dfrac{b(c+a-b)}{b+c-a}, a\ ] = \dfrac{q}{p}[\mathrm{H}\ ,\mathrm{I}\ , J\ ]$，H , I , J 三者都是經運算後形成互質且都為正整數，此 [H , I , J]型就是被找到的與 $[a,b,c]$型組成一對的配對邊長三元素，請看下例中的 [6, 5, 4]型與 [20, 17, 13]型；

例 3：以各種第 4 類型範例來說明；

由 [4, 3, 2]型解出互質的 [10, 9, 4]型，其相等有理數值為 21/16 。

由 [13, 12, 9]型解出互質的 [18, 15, 13]型，其相等有理數值為 511/351 。

由 [10, 7, 5]型解出的 [30, 28, 10]=2[15, 14, 5]，算出互質的 [15, 14, 5]型，再得出其相等有理數值為 223/175 。

由 [6, 5, 4]型解出的 $[\dfrac{28}{3}, \dfrac{25}{3}, 6] = \dfrac{1}{3}[28, 25, 18]$，算出互質的 [28, 25, 18]型，再得出其相等有理數值為 23/16 。

由 [20, 17, 13]型解出的$[\dfrac{156}{5}, \dfrac{136}{5}, 20] = \dfrac{4}{5}[39, 34, 25]$，算出互質的 [39, 34, 25]型，再得出其相等有理數值為 317/221 。

… … … ，因此，每一個互質的 $[a,b,c]$型都能尋找出成對的另一相異型。

[B5].第 5 類型： 3 整數邊長皆各不相等的三角形 $[a,b,c]$型與 $[\ \dfrac{c(a+b-c)}{c+a-b}, b, \dfrac{a(b+c-a)}{c+a-b}\ ]$型成對，$a>b>c$， $\dfrac{c(a+b-c)}{c+a-b}$ 與 $\dfrac{a(b+c-a)}{c+a-b}$ 兩者可能皆是正整數或是有理數。此成對的類型中有共同的b值，且b值位置相同。

仿效[B3].與[B4].的分析歸納出此類型受規範的 2 項關鍵運算準則，如下列敘述；

(a) 第 1 個 $[a,b,c]$型中的第 2 個數b需置於第 2 個 $[x,b,w]$型的第 2 個位置。

(b) 第 1 個 $[a,b,c]$型的第 1 個數a與第 3 個數c兩者的差值 $a-c$ 恰恰好等於第 2 個 $[x,b,w]$型的第 1 個數x與第 3 個數w兩者的差值 $x-w$ 。 $x-w = a-c$ 。

這 2 項關鍵運算準則也是使 $\cos A+\cos B+\cos C$ 具有相等有理數值的必然結果。

[存在性證明]： 依據 2 項運算準則，由 $[a,b,c]$型得出 $[x,b,x-(a-c)]$型。則

$$\left(\frac{b+c}{a}-1\right)\left(\frac{c+a}{b}-1\right)\left(\frac{a+b}{c}-1\right)=\left(\frac{b+x-a+c}{x}-1\right)\left(\frac{2x-a+c}{b}-1\right)\left(\frac{x+b}{x-a+c}-1\right)$$

$$\Rightarrow \qquad (c+a-b)\,x\,(x-a+c)=a\,c\,(2x-a+c-b) \qquad \Rightarrow$$

$$(c+a-b)\,x^2-(a^2-ab-c^2+bc+2ac)\;x\;+\;a\,c\,(a-c+b)\;=0 \qquad \Rightarrow$$

$[(c+a-b)\,x-c\,(a-c+b)]\,[\,x-a\,]=0 \quad \Rightarrow$ (i) 當 $x=a$ ，回復到 $[\,a,b,c\,]$型。

(ii) 當 $x=\dfrac{c(a+b-c)}{c+a-b}$ ，則 $x-(a-c)=\dfrac{c(a+b-c)}{c+a-b}-(a-c)=\dfrac{a(b+c-a)}{c+a-b}$ ，得

$[\,x,b,x-(a-c)\,]=\left[\;\dfrac{c(a+b-c)}{c+a-b},b,\dfrac{a(b+c-a)}{c+a-b}\;\right]$ ，確認存在性。

※ $\left[\;\dfrac{c(a+b-c)}{c+a-b},b,\dfrac{a(b+c-a)}{c+a-b}\;\right]$型內元素出現非正整數時，只需對其提出適當有理數而得到$\left[\;\dfrac{c(a+b-c)}{c+a-b},b,\dfrac{a(b+c-a)}{c+a-b}\;\right]=\dfrac{q}{p}[\mathrm{u}\,,\mathrm{v}\,,z\,]$ ，u , v , z三者互質，此 [u , v , z]型就是找到的與 $[\,a,b,c\,]$型形成一對，化解了非正整數情況的尷尬。

[唯一性證明]：略，證明法與第 4 類型完全相同。討論性質亦然。

例 4：以各種第 5 類型範例來說明；

由 [8, 7, 3]型解出互質的 [9, 7, 4]型，其相等有理數值為 9/7 。

由 [12, 11, 3]型解出互質的 [15, 11, 6]型，其相等有理數值為 119/99 。

由 [15, 13, 4]型解出互質的 [16, 13, 5]型，其相等有理數值為 77/65 。

由 [15, 14, 4]型解出互質的 [20, 14, 9]型，其相等有理數值為 137/112 。

由 [18, 17, 11]型解出互質的 [22, 17, 15]型，其相等有理數值為 267/187 。

………，因此，很多互質的 $[\,a,b,c\,]$型都能尋找出成對的另一相異型 $[\,x,b,w\,]$。

[B6]. 第 6 類型： 3 整數邊長皆各不相等的三角形 $[\,a,b,c\,]$型與 $[\;\chi,a,b\;]$型成為一對，$a>b$，$a>c$，$b\neq c$， χ 為 a,b,c 的函數，其可能是正整數或正有理數。此成對的類型中有共同的a與b值，但a與b值在兩型內出現的位置不相同。

若χ 為正有理數，則提出分數型的公因數而再算出互質的三元數。

仿效[B3].與[B4].的分析歸納出此類型受規範的 2 項關鍵運算準則，如下列敘述；

(a) 第 1 個 $[\,a,b,c\,]$型中的第 1 個數a需置於第 2 個 $[\;\chi,a,b\;]$型的第 2 個位置。

(b) 第 1 個 $[\,a,b,c\,]$型的第 2 個數b需置於第 2 個 $[\;\chi,a,b\;]$型的第 3 個位置。兩型中的c與χ互不相等。即 $c\neq\chi$ 。且 $\chi>a$， $\chi>b$。

[存在性證明]： 依據 2 項運算準則，可由 $[\,a,b,c\,]$型得出 $[\;\chi,a,b\;]$型。

將 $[\,a,b,c\,]$型與 $[\;\chi,a,b\;]$型代入(1)式中的連乘積式作運算，尋找χ的關係式：

(I) 將 $[\,a,b,c\,]$ 型代入，得； $\left(\dfrac{b+c}{a}-1\right)\left(\dfrac{c+a}{b}-1\right)\left(\dfrac{a+b}{c}-1\right)$

(II) 將 $[\ \chi,a,b\ ]$ 型代入連乘積式中，得；$\left(\dfrac{a+b}{\chi}-1\right)\left(\dfrac{b+\chi}{a}-1\right)\left(\dfrac{\chi+a}{b}-1\right)$

這 2 組相異連乘積運算式要分別計算出相等的有理數值，以此繼續運算推理；

(III) 由 $\left(\dfrac{b+c}{a}-1\right)\left(\dfrac{c+a}{b}-1\right)\left(\dfrac{a+b}{c}-1\right)=\left(\dfrac{a+b}{\chi}-1\right)\left(\dfrac{b+\chi}{a}-1\right)\left(\dfrac{\chi+a}{b}-1\right)$

$$\Rightarrow \quad \frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{c}\chi = (a+b-\chi)(b+\chi-a)(\chi+a-b)$$

$$= (a+b-\chi)[\chi^2-(a-b)^2]$$

$$= (a+b)\chi^2-(a+b)(a-b)^2-\chi^3+(a-b)^2\chi \qquad \Rightarrow$$

$$\chi^3-(a+b)\chi^2+\left[\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{c}-(a-b)^2\right]\chi+(a+b)(a-b)^2=0 \qquad (6)$$

這是 3 次方程式！天然大障礙！要能解出它，必須要耐心追蹤、分析它的來龍去脈，再按圖索驥，抽絲剝繭，仔細評估並篩選出實踐解題徵兆的細微線索來。

(IV) 先對比 $[a,b,c]$型與 $[\ \chi,a,b\ ]$型，兩者三元數內容有相近似性，加上前述的第 3、4、5 類型中觀察到各種證明與尋找過程經驗裡，解方程式的結果必然常出現回復原本的 $[a,b,c]$型解。於此，應可推斷這個 3 次方程式必然擁有 $\chi=c$ 的根！也就是必有 $(\chi-c)$ 的因式，這即是重大的細微線索。

所以，特別要將這個 3 次方程式配形成必有 $(\chi-c)$ 的因式；繼續推演，得

$$\chi^3-c\chi^2-(a+b-c)\chi^2-\left[\frac{a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2-ac^2-bc^2}{c}\right]\chi+(a+b)(a-b)^2=0$$

$$\Rightarrow \quad \chi^2(\chi-c)-(a+b-c)\chi(\chi-c)-c(a+b-c)\chi$$

$$-\left[\frac{a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2-ac^2-bc^2}{c}\right]\chi+(a+b)(a-b)^2=0$$

$$\Rightarrow (\chi-c)[\chi^2-(a+b-c)\chi]-\left[\frac{a^3+b^3-a^2b-ab^2}{c}\right]\chi+(a+b)(a-b)^2=0$$

(V) 展開上式，化簡 $(a+b)(a-b)^2 = a^3+b^3-a^2b-ab^2$ ，再代入運算，得

$$(\chi-c)[\chi^2-(a+b-c)\chi]-\frac{(a+b)(a-b)^2}{c}(\chi-c)=0 \qquad \Rightarrow$$

$$(\chi-c)\left[\chi^2-(a+b-c)\chi-\frac{(a+b)(a-b)^2}{c}\right]=0$$

(i) 當 $\chi=c$ ，則 $[\ \chi,a,b\ ]$型回復到 $[a,b,c]$型。所以，χ不能等於 c 。

(ii) 當 $\chi^2-(a+b-c)\chi-\dfrac{(a+b)(a-b)^2}{c}=0$，由 2 次方程式公式解，得

$$\chi=\frac{1}{2}\left\{(a+b-c)\pm\sqrt{(a+b-c)^2+4\frac{(a+b)(a-b)^2}{c}}\right\}$$

，注意 $\sqrt{\ }$ 前須取 + 號，得

$$\chi=\frac{1}{2}\left\{(a+b-c)+\sqrt{(a+b-c)^2+4\frac{(a+b)(a-b)^2}{c}}\right\} \tag{7}$$

若 $\sqrt{\ }$ 前取 − 號，則 χ 值變成負值，形成有一個邊長為負值的不合理三角形。

故，證明出 $[a,b,c]$型與 $\left[\frac{1}{2}\left\{(a+b-c)+\sqrt{(a+b-c)^2+4\frac{(a+b)(a-b)^2}{c}}\right\},a,b\right]$型即為配型成對存在的具有相等有理數值解。

此處 $\left\{\sqrt{(a+b-c)^2+4\frac{(a+b)(a-b)^2}{c}}\right\}$需要為正整數或正有理數，否則即無法找到所要求的配對型整數邊長三角形。在逐步計算尋覓到 [20, 19, 11]型時始發現到 4 組配對型，才足以歸納分析出 χ 生成公式(7)。找到有理數 χ 也是一項挑戰。

例 5：以各種第 6 類型範例來說明；以 $[a,b,c]$型尋找配對的 $[\chi,a,b]$型。

[h1]. 由 $[a,b,c]$=[11, 9, 5]型為原型，代入 χ 生成公式中，得

$$\chi=\frac{1}{2}\left\{(a+b-c)+\sqrt{(a+b-c)^2+4\frac{(a+b)(a-b)^2}{c}}\right\}=\frac{1}{2}\left\{(11+9-5)+\sqrt{15^2+4\frac{20\cdot 2^2}{5}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{15+\sqrt{15^2+4\frac{20\cdot 2^2}{5}}\right\}=\frac{1}{2}\left\{15+\sqrt{289}\right\}=\frac{1}{2}\left\{15+17\right\}=16$$

即解出互質的 $[\chi,a,b]$=[16, 11, 9]型，並得出其相等有理數值為 29/22 。

[h2]. 由 [17, 11,14]型解出互質的 [18, 17, 11]型，其相等有理數值為 267/187 。

由 [17, 13, 12]型解出互質的 [20, 17, 13]型，其相等有理數值為 317/221 。

由 [19, 11, 16]型解出互質的 [20, 19, 11]型，其相等有理數值為 293/209 。

由 [19, 13, 12]型解出互質的 [24, 19, 13]型，其相等有理數值為 337/247 。

由 [19, 14, 11]型解出互質的 [25, 19, 14]型，其相等有理數值為 181/133 。

⋯ ⋯，因此，先取定互質的 $[a,b,c]$型再尋找出成對的另一相異型$[\chi,a,b]$。

[唯一性證明]： 先將 $[\chi,a,b]$型調整為 $[a,b,\chi]$型，再以 $[a,b,\chi]$型為原型，遵循上述 2 項關鍵運算準則來尋覓第 3 個相異三元數，設定其為 $[\mathrm{Y},a,b]$型，再透過計算找出

Y的個別關係式(值)；此處 $\chi>a$， $\chi>b$， $\mathrm{Y}<\chi$ 。

(I) 於[存在性證明]裡原本由 $[a,b,c]$型導引推出 $[\chi,a,b]$型。有下列關係式；

$$\left(\frac{b+c}{a}-1\right)\left(\frac{c+a}{b}-1\right)\left(\frac{a+b}{c}-1\right)=\left(\frac{a+b}{\chi}-1\right)\left(\frac{b+\chi}{a}-1\right)\left(\frac{\chi+a}{b}-1\right) \tag{8}$$

(II) 現在，要以 $[a,b,\chi]$型來推演出具有相等有理數值的 $[\mathrm{Y},a,b]$型；可得

$$\left(\frac{b+\chi}{a}-1\right)\left(\frac{\chi+a}{b}-1\right)\left(\frac{a+b}{\chi}-1\right)=\left(\frac{a+b}{\mathrm{Y}}-1\right)\left(\frac{b+\mathrm{Y}}{a}-1\right)\left(\frac{\mathrm{Y}+a}{b}-1\right) \tag{9}$$

(III) 對照比較 (8)式與 (9)式，必得下列等式關係式；

$$\left(\frac{b+c}{a}-1\right)\left(\frac{c+a}{b}-1\right)\left(\frac{a+b}{c}-1\right)=\left(\frac{a+b}{\mathrm{Y}}-1\right)\left(\frac{b+\mathrm{Y}}{a}-1\right)\left(\frac{\mathrm{Y}+a}{b}-1\right) \tag{10}$$

(8)式與(10)式完全相類似，仿效(8)式裡 χ^3的運算流程，推演出 Y 的 3 次方程式；

$$\mathrm{Y}^3-(a+b)\mathrm{Y}^2+\left[\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{c}-(a-b)^2\right]\mathrm{Y}+(a+b)(a-b)^2=0 \tag{11}$$

這個 3 次方程式必然擁有 $\mathrm{Y}=c$ 的根！也就是必有 $(\mathrm{Y}-c)$ 的因式，分解因式，

得 $(\mathrm{Y}-c)\left[\mathrm{Y}^2-(a+b-c)\mathrm{Y}-\dfrac{(a+b)(a-b)^2}{c}\right]=0$

(i) 當 $\mathrm{Y}=c$ ，則 $[\mathrm{Y},a,b]=[c,a,b]$型又回復到 $[a,b,c]$型。

(ii) 當 $\mathrm{Y}^2-(a+b-c)\mathrm{Y}-\dfrac{(a+b)(a-b)^2}{c}=0$ ，由 2 次方程式公式解，得

$$\mathrm{Y}=\frac{1}{2}\left\{(a+b-c)\pm\sqrt{(a+b-c)^2+4\frac{(a+b)(a-b)^2}{c}}\right\}$$

，注意 $\sqrt{\ }$ 前須取 + 號，得

$$\mathrm{Y}=\frac{1}{2}\left\{(a+b-c)+\sqrt{(a+b-c)^2+4\frac{(a+b)(a-b)^2}{c}}\right\} \tag{12}$$

對比 (12)式與 (7)式，必得 $\mathrm{Y}=\chi$，則 $[\mathrm{Y},a,b]$型又回復到 $[\chi,a,b]$型。所以，找不到第 3 個相異三元數，即 $[a,b,c]$型與 $[\chi,a,b]$型唯一配成一對。

例 6：以例 5 中被解出互質的 $[\chi,a,b]$型來尋覓下一個相異三元數；

[u1]. 取 [16, 11, 9]型改成 [11, 9, 16]型為原型，代入Y 生成公式中，得

$$\mathrm{Y}=\frac{1}{2}\left\{(a+b-c)+\sqrt{(a+b-c)^2+4\frac{(a+b)(a-b)^2}{c}}\right\}=\frac{1}{2}\left\{(11+9-16)+\sqrt{4^2+4\frac{20\cdot 2^2}{16}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{4+\sqrt{4^2+4\frac{20\cdot 2^2}{16}}\right\}=\frac{1}{2}\left\{4+\sqrt{4^2+20}\right\}=\frac{1}{2}\left\{4+\sqrt{36}\right\}=5$$

所以，得出$[\ \mathrm{Y}, a, b\ ]=[5, 11, 9]$ ，即由 [16, 11, 9]型解出互質的 [11, 9, 5]型，肯定在第 6 類型的規範下沒有新的、相異的第 3 個三元數存在，唯一性確認。

[u2]. 取 [20, 19, 11]型改成 [19,11, 20]型為原型，代入Y 生成公式中，得

$$\mathrm{Y}=\frac{1}{2}\left\{(a+b-c)+\sqrt{(a+b-c)^2+4\frac{(a+b)(a-b)^2}{c}}\right\}=\frac{1}{2}\left\{(19+11-20)+\sqrt{10^2+4\frac{30\cdot 8^2}{20}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{10+\sqrt{10^2+384}\right\}=\frac{1}{2}\left\{10+\sqrt{484}\right\}=\frac{1}{2}\left\{10+22\right\}=16$$

所以，得出 $[\ \mathrm{Y}, a, b\ ]=[16, 19, 11]$ ，即由 [20, 19, 11]型解出互質的 [19, 11, 16]型，在第 6 類型的規範下沒有新的、相異的第 3 個三元數存在，唯一性也確認。

[u3]. 取 [25, 19, 14]型改成 [19,14, 25]型為原型，代入Y 生成公式中，得

$$\mathrm{Y}=\frac{1}{2}\left\{(19+14-25)+\sqrt{8^2+4\frac{33\cdot 5^2}{25}}\right\}=\frac{1}{2}\left\{8+\sqrt{8^2+132}\right\}=\frac{1}{2}\left\{8+\sqrt{196}\right\}=11$$

所以，得出 $[\ \mathrm{Y}, a, b\ ]=[11, 19, 14]$ ，即由 [25, 19, 14]型解出互質的 [19, 14, 11]型，在第 6 類型的規範下沒有新的、相異的第 3 個三元數存在，唯一性也確認。⋯ ⋯ ⋯，只要有配對型的三元數都能滿足確認唯一性的特質。

[B7]. 第 7 類型： 此類型為 4 個完全相異三元數都具有相等有理數值。此類型為第 6 類型與第 4 類型的組合，或第 6 類型與第 5 類型的組合。

由比對數值分析結果，得到下列 [2 項關鍵操作準則]：第 6 與第 4 類型的組合；

(a) 首先必須要先取到第 6 類型成對的 $[a, b, c]$型與 $[\ \chi, a, b\ ]$型。

(b) 再由 $[a, b, c]$型依照第 4 類型準則找到成對的 $\left[\ \frac{c(a+b-c)}{b+c-a}, \frac{b(c+a-b)}{b+c-a}, a\ \right]$型，依次由 $[\ \chi, a, b\ ]$型遵照第 4 類型準則找到成對的 $\left[\ \frac{b(\chi+a-b)}{a+b-\chi}, \frac{a(b+\chi-a)}{a+b-\chi}, \chi\ \right]$型。 計算後，可能有分數的公因數出現，提出公因數即可。

依據這準則的搜尋，可得$[a, b, c]$型、$[\ \chi, a, b\ ]$型、$\left[\ \frac{c(a+b-c)}{b+c-a}, \frac{b(c+a-b)}{b+c-a}, a\ \right]$型與$\left[\ \frac{b(\chi+a-b)}{a+b-\chi}, \frac{a(b+\chi-a)}{a+b-\chi}, \chi\ \right]$型等 4 個完全相異三元數都具有相等有理數值。

第 7 類型的檢驗證明如前述一樣，此處不需再作重複的演繹流程敘述說明。

例 7： 以下就是第 7 類型的示例解說；

[v1]. 先取得第 6 類型規範下的配對； [11, 9, 5]型與 [16, 11, 9]型，再由第 4 類型配對準則以[11, 9, 5]= $[a,b,c]$型為原型，計算尋找出 $\left[\dfrac{c(a+b-c)}{b+c-a},\dfrac{b(c+a-b)}{b+c-a},a\right]$= $\left[\dfrac{5(11+9-5)}{9+5-11},\dfrac{9(5+11-9)}{9+5-11},11\right]$= [25, 21, 11] 的第 3 個相異三元數。

其次，以 $[16,11,9]=[a,b,c]$型為原型，計算尋找出 $\left[\dfrac{c(a+b-c)}{b+c-a},\dfrac{b(c+a-b)}{b+c-a},a\right]$ [81, 77, 32]型的第 4 個相異三元數。所以，一併得到 [11, 9, 5]型與 [16, 11, 9]型、[25, 21, 11]型、[81, 77, 32]型等 4 個相異三元數，其相等有理數值為 29/22 。

[v2]. 先取得第 6 類型規範下的配對；[17, 11,14]型與[18, 17, 11]型，再由[17, 11,14]型以第 4 類型準則計算出 $[\frac{49}{2},\frac{55}{2},17]=\frac{1}{2}[49,55,34]$，得到 [49, 55, 34]型。

其次，由 [18, 17, 11]型以第 4 類型準則計算出 $[\frac{132}{5},\frac{102}{5},18]=\frac{6}{5}[22,17,15]$，得到 [22, 17, 15]型。所以，一起得到 [17, 11,14]型與 [18, 17, 11]型、[49, 55, 34]型、[22, 17, 15]型等 4 個相異三元數，其相等有理數值為 267/187 。

[v3]. 先取得第 6 類型規範下的配對；[17, 13, 12]型與[20, 17, 13]型，再由[17, 13, 12]型以第 4 類型準則計算出 [27, 26, 17]型。其次，由 [20, 17, 13]型以第 4 類型準則計算出 $[\frac{156}{5},\frac{136}{5},20]=\frac{4}{5}[39,34,25]$，得到 [39, 34, 25]型。所以，一併得到有[17, 13, 12]型與[20, 17, 13]型、[27, 26, 17]型、[39, 34, 25]型等 4 個相異三元數，它們的相等有理數值為 317/221 。

[v4]. 先取得第 6 類型規範下的配對；由[19, 13, 12]型解出互質的 [24, 19, 13]型，再由[19, 13, 12]型以第 4 類型準則計算出 [40, 39, 19]型。其次，由[24, 19, 13]型以第 4 類型準則計算出 $[\frac{13\cdot 15}{4},\frac{19\cdot 9}{4},24]=\frac{3}{4}[65,57,32]$，得到 [65, 57, 32]型。所以，一起得到有[19, 13, 12]型與[24, 19, 13]型、[40, 39, 19]型、[65, 57, 32]型等計有 4 個相異三元數，它們的相等有理數值為 337/247 。………，依此操作準則可找到許多 4 個相異三元數的組合。

以上就是作者發現的 7 種類型型態，豐富且有規律變化又令人欣賞！也許可能還有其它類型型態等待被發掘，持續搜尋計算 $[a,b,c]$三元素以待結果………。

肆、結論

[1]. 實際對照比較每一組三元數成對的特徵關係並審視到兩數據間的相關規律性，因而歸納出三元數成對的 2 項關鍵運算準則。以此運算準則再應用(1)式中的連乘積式作等式運算，尋覓出配對的兩型三元數關係式，而得到關鍵的各型生成公式。應用生成公式計算出的數值可能得到整數或分數；若得出分數，就提出分數型公因數，再取得互質的整數三元數成為配對型。

[2]. 每一種類型配對搜尋時，搜到的最小整數邊長三角形組；

第 1 類型配對最小整數邊長三角形為 [1, 1, 1]型與 [2, 2, 2]型。

第 2 類型配對最小整數邊長三角形為 [2, 2, 1]型與 $[2k, 2k, k]$型。

第 3 類型配對最小整數邊長三角形為 [2, 2, 1]型與 [3, 2, 2]型。

第 4 類型配對最小整數邊長三角形為 [4, 3, 2]型與 [10, 9, 4]型。

第 5 類型配對最小整數邊長三角形為 [8, 7, 3]型與 [9, 7, 4]型。

第 6 類型配對最小整數邊長三角形為 [11, 9, 5]型與 [16, 11, 9]型。

第 7 類型搭配成組的有 4 個最小整數邊長三角形為 [11, 9, 5]型與 [16, 11, 9]型、 [25, 21, 11]型、 [81, 77, 32]型。

[3]. 第 6 類型的 χ 生成公式較複雜；尤其需要恰好調整到配成完全平方數，否則 χ 就形成無理數；因此，要搜尋到 [16, 11, 9]型三角形出現時才比對出 [11, 9, 5]型三角形的配對存在。沒有預先做大量的搜尋運算，就無法得知第 6 類型的配對準則與分析理論。

[4]. 第 7 類型的 4 個相異三元數的組合無法預先知曉，也是要等到 [16, 11, 9]型與 [11, 9, 5]型的配對情形出現時，再演算推導出 χ 生成公式後始能查覺它們 4 個三元數組的存在。配對的規律性之一是；任一型三元數中必有某一元數或某兩元數相同或成倍數關係，請看第 7 類型的 4 個最小整數邊長三角形為[11, 9, 5]型與[16, 11, 9]型、[25, 21, 11]型、[81, 77, 32]型等，前 3 個型都有整數 11，最後 1 個則出現 11 的倍數 77。這是尋覓配對型的重要徵兆。

參考文獻

黃武雄，**中西數學簡史**，1980，人間文化事業公司。

蔡聰明，**數學拾貝---星空燦爛的數學**，2000，三民書局。

笹部貞市郎編　**幾合學辭典**，1988，九章出版社。

林聰源，**數學史---古典篇**，1995，凡異出版社。

項武義，**基礎幾何學**，2011，五南圖書出版公司。

項武義，**基礎分析學**，2012，五南圖書出版公司。

三角恆等式。 維基百科 Wikipedia 自由的百科全書

三角函數精確值。維基百科 Wikipedia 自由的百科全書

E.W. Hobson : *A treatise on plane and Advanced trigonometry*, Dover , 1957 .

Z.A. Melzek : *Invitation to geometry*, John Wiley and Sons , 1983 .