一個拉曼奴姜等式的證明

許閎揚

彰化縣立彰化藝術高級中學

壹、前言

在數學傳播第 39 卷第 3 期[1]，彰師大數學系李錦鎣老師介紹了一個關於拉曼奴姜(Ramanujan)的等式$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$，其中 n 為一個正整數，$[x]$為小於或等於 x 最大整數。他使用了微積分來證明這個等式並推廣了一些結果，相關的研究可參考[2,3,4,5,6]。我們好奇的是，面對這個高中生可以理解的式子，可否使用高中數學來證明？經過一番試驗，我們找到了三種證明方式。

貳、證明 $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$

在本篇作品中，我們提供以下三種證明方法供讀者參考：

第一種證明：

對任意的正整數 n，都有一整數 k 滿足 $k\le\sqrt{n}<k+1$。我們分段討論來證明這結果：

1. 當 $k\le\sqrt{n}<k+\dfrac{1}{2}$ ，

   上式等價於 $k^2\le n<k^2+k+\dfrac{1}{4}$，因為 n 是整數，所以上式可以改成 $k^2\le n\le k^2+k$ 。

   現在，我們再將 n 分成兩段來討論：

   (1) 當 $k^2\le n\le k^2+k-1$ 時，

   我們先探討等號左邊 $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ 的範圍:。由下列不等式

   $$2k<\sqrt{k^2}+\sqrt{k^2+1}\le\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\le\sqrt{k^2+k-1}+\sqrt{k^2+k}$$

   $$<\left(k+\frac{1}{2}\right)+\left(k+\frac{1}{2}\right)=2k+1,$$

   得

   $$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=2k\text{ 。}\quad\cdots\cdots\quad(1)$$

接著，我們探討等號右邊 $\sqrt{4n+2}$ 的範圍：

因為 $k^2 \le n \le k^2+k-1$，得

$$4k^2+2 \le 4n+2 \le 4k^2+4k-2 \text{，}$$

得

$$2k < \sqrt{4k^2+2} \le \sqrt{4n+2} \le \sqrt{4k^2+4k-2} < 2k+1 \text{，}$$

所以，$\left[\sqrt{4n+2}\right] = 2k$。 ………………………………………………… (2)

由(1)(2)得.

$$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right] \text{，}$$

得證。

(2)　當 $n = k^2+k$ 時，

我們先探討等號左邊 $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ 的範圍：

首先，

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1} = \sqrt{k^2+k}+\sqrt{k^2+k+1} < (k+1)+(k+1) = 2k+2 \text{，} \cdots (3)$$

接著，我們證明 $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} > 2k+1$。 ……………………………………… (4)

不等式(4)可由以下的等價關係得證：

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1} = \sqrt{k^2+k}+\sqrt{k^2+k+1} > 2k+1$$

$$\Leftrightarrow k^2+k+k^2+k+1+2\sqrt{k^2+k}\cdot\sqrt{k^2+k+1} > 4k^2+4k+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{k^2+k}\cdot\sqrt{k^2+k+1} > k^2+k = \sqrt{k^2+k}\cdot\sqrt{k^2+k} \text{。}$$

由 (3)(4) 得

$$2k+1 < \sqrt{n}+\sqrt{n+1} < 2k+2 \text{，}$$

因此，

$$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right] = 2k+1 \text{。} \cdots\cdots (5)$$

接著，我們探討等號右邊 $\sqrt{4n+2}$ 的範圍：

由 $n = k^2+k$，得

$$2k+1 < \sqrt{4k^2+4k+2} = \sqrt{4n+2} < 2k+2 \text{，}$$

故 $\left[\sqrt{4n+2}\right] = 2k+1$。 ……………………………………………… (6)

於是，由 (5)(6) 得

$$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right],$$

得證。

2. 當 $k+\frac{1}{2}\le\sqrt{n}<k+1$，其中 $k\in Z$。

上式等價於 $k^2+k+\frac{1}{4}\le n<k^2+2k+1$。因為 n 是整數，所以上式可以改成

$k^2+k+1\le n\le k^2+2k$。

我們先探討等號左邊 $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ 的範圍。由下列不等式：

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)+\left(k+\frac{1}{2}\right)<\sqrt{k^2+k+1}+\sqrt{k^2+k+2}\le\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$$
$$\le\sqrt{k^2+2k}+\sqrt{k^2+2k+1}<(k+1)+(k+1)=2k+2,$$

得知

$$2k+1<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<2k+2,$$

可知

$$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=2k+1。\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

接著，我們探討等號右邊 $\sqrt{4n+2}$ 的範圍：

由 $k^2+k+1\le n\le k^2+2k$ 得

$$4k^2+4k+6\le 4n+2\le 4k^2+8k+2,$$

可推得

$$2k+1<\sqrt{4k^2+4k+6}\le\sqrt{4n+2}\le\sqrt{4k^2+8k+2}<2k+2,$$

故

$$\left[\sqrt{4n+2}\right]=2k+1。\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

因此，由 (7)(8) 得

$$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right],$$

得證。

第二種證明：

在參考資料[2]中，陳國傑老師證明更一般的數學式：

$$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+2}\right]=\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]=\left[\sqrt{4n+3}\right],$$

證明如下：

首先，我們知道對任一整數 k ， $k^2 \equiv 0 \pmod 4$ 或 $k^2 \equiv 1 \pmod 4$ 。

所以，對任意的非負整數 n ，存在一整數 k 使得

$$k^2 \le 4n+1 < 4n+2 < 4n+3 < 4n+4 \le (k+1)^2 \text{，}$$

得知

$$k \le \sqrt{4n+1} < \sqrt{4n+2} < \sqrt{4n+3} < \sqrt{4n+4} \le k+1 \text{。}$$

因此，

$$\left[\sqrt{4n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right] = \left[\sqrt{4n+3}\right] = k \text{。} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9)$$

另一方面，藉由不等式兩邊平方可得

$$\begin{aligned}\sqrt{4n+1} &< \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2} < \sqrt{4n+3} \\ &< \sqrt{n} + \sqrt{n+2} < \sqrt{4n+4} \le k+1 \text{，} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (10)\end{aligned}$$

因此，由(9)(10)得

$$\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{n} + \sqrt{n+2}\right] = \left[\sqrt{4n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right] = \left[\sqrt{4n+3}\right] \text{，}$$

得證。

第三種證明：

首先，我們證明： $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right] \le \left[\sqrt{4n+2}\right]$ 。

令 $a_n = \sqrt{n} + \sqrt{n+1},\ b_n = \sqrt{4n+2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ ，則 a_n 與 b_n 都是無理數，且

$$b_n^2 - a_n^2 = 4n+2 - \left(2n+1+2\sqrt{n(n+1)}\right) = 2n+1-2\sqrt{n(n+1} > 0 \text{，}$$

上式最後的不等式可由 $(2n+1)^2 - 4n(n+1) = 1 > 0$ 得到。因此， $b_n > a_n$ ；於是可推得 $\left[a_n\right] \le \left[b_n\right]$ 。如果我們能再證明： $b_n - \left[a_n\right] < 1$ ，則有

$$0 < b_n - a_n < b_n - \left[a_n\right] < 1 \text{；}$$

由此即可推得 $\left[a_n\right] = \left[b_n\right]$ 。

對任意的正整數 n ，都有一整數 k 滿足 $k^2 \le n < (k+1)^2$ 。我們分段討論來證明這結果：

1. 當 $k^2 \le n \le k^2+k-1$ 時，由第一種證法可知 $[a_n]=2k$ 。又

$$b_n=\sqrt{4n+2} \le \sqrt{4k^2+4k-2} < 2k+1，$$

因此， $b_n-[a_n]<(2k+1)-(2k)=1$ 。

2. 當 $k^2+k \le n < (k+1)^2$ 時，由第一種證法可知 $[a_n]=2k+1$。又由

$$k^2+k \le n < (k+1)^2 = k^2+2k+1，$$

可知 $n \le k^2+2k$ ；故

$$b_n=\sqrt{4n+2} \le \sqrt{4k^2+8k+2} < 2k+2 。$$

因此， $b_n-[a_n]<(2k+2)-(2k+1)=1$ 。

得證。

參、結語

這道問題在李錦鎣老師的文章[1]中有非常詳盡的探討，他使用大一學生所學的微積分來證明並推廣這個結果。本文的第一種證明是利用分段討論的方式，它的優點只需要高中知識，缺點是探討過程繁瑣而且不易推廣到更複雜的情形。第二種證明是陳國傑老師在文章[2]中的證明，顯然它比第一種簡潔得多。有興趣的讀者可嘗試不用微積分來證明一些 Ramanujan 推廣等式，例如：李錦鎣老師文章中的 $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right]=\left[\sqrt{9n+8}\right]$，相信會是非常有趣的挑戰。

參考文獻

李錦鎣 (2015), 等式 $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right]=\left[\sqrt{9n+8}\right]$ 成立嗎?。**數學傳播季刊**第 155 期。

Kuo-Jye Chen (2014), On a problem proposed by Ramanujan , 2014 彰化師範大學自然科學研討會會議手冊 http://science.ncue.edu.tw/journal/article/1-2-7.pdf

B.C. Berndt (1995), *Ramanujan's Notebooks*, Part IV, Springer-Verlag, 77-78.

B.C. Berndt, Y.-S. Choi, and S.-Y. Kang (2001), The problems submitted by Ramanujan to the Journal of the Indian Mathematical Society [MR1665361 (2000i:11003)]. In Ramanujan: essays and surveys *Vol*. 22, 215-258.

A. M. Gleason, R. E. Greenwood, and L. M. Kelly (1980), The William Lowell Putnam Mathematical Competition, Problems and Solutions: 1938-1964, *Mathematical Association of America*, 257-258.

S. Ramanujan (1918), Question 723, J. Indian Math. Soc., Vol. 10, 357-358.