觀察到以北極星為圓心的同心圓星星完整圓形軌跡或圓的部份弧形軌跡之地理條件

劉惟明

台北市園藝花卉業職業工會會員

壹、名詞解釋

1. 弧角寬：星星圓弧軌跡的角寬，0°≦弧角寬≦360°。
2. 視線錐張角：在地球表面任一處永夜或假設無太陽光時，觀察天幕上的星星，一日內可以見到星星的軌跡皆為完整圓形的視線範圍為圓錐形(參考圖 6)，該圓錐的張角稱之，0°≦視線錐張角≦180°。
3. 角高：在地球表面任一處觀察天幕上由南經天頂至北之虛線(赤經)上任一方向的星星，該星星的角高以該處地平面(本文假設陸地的海拔高度皆為 0)正南方向起算為準，0°≦角高≦180°。

本文使用之常數：太陽直徑約 1,400,000 公里、地球與太陽的平均距離約 150,000,000 公里、赤道面與黃道面的交角為 23.5°。

許多人看過如同圖 1 的星星軌跡。在何地理條件下可觀察到如此的軌跡？特別是在何地理條件下可觀察到一顆星星完整圓形的軌跡，或僅是圓的部份弧形的軌跡(其餘軌跡在地平面之下無法觀察到)？

圖中同心圓的圓心是北極星(Polaris，圖 5 中以 P 表示)，所以要在北半球朝北方天空才可觀察到此星星軌跡圖。圖中各星星的軌跡僅為弧形，非完整圓形，這是因為照片曝光時間不足 24 小時。在一日之內皆永夜無陽光干擾(本文假設無高聳的物體或雲雨干擾視線)的狀況下，若照片曝光時間達 24 小時，即可觀察到完整圓形的星星軌跡。本文先分析北半球何時何處有永夜。

圖 1：取材自 Flickr，作者 Sjensen~，原版，作者保留部分權利

貳、永夜的條件

太陽直徑約 1,400,000 公里，地球與太陽的平均距離約 150,000,000 公里，從地球看太陽的視角計算得 0.53°，可視太陽為點光源，光線皆平行照射到地球。地球表面

冬至、春分、夏至正午時陽光來向如圖 2，秋分正午時陽光來向如圖 3。將圖 2、3 合併，可得圖 4。春分時在北極點整日皆可見太陽在地平面上，永晝自此時此處開始隨陽光可及處逐漸擴大而擴展到北極圈內較低緯度處。夏至時北極圈上 0 時日出，24 時日落，北極圈為永晝區的極限。夏至時在北極圈外，子夜前後有一段時間太陽在地平面之下，故北極圈外無永晝。夏至後，永晝自北極圈開始隨陽光可及處逐漸縮小而退縮到北極圈內較高緯度處。秋分時在北極點整日皆可見太陽在地平面上，永晝在此時此處結束，而永夜在此時此處開始隨陽光可及處繼續逐漸縮小而擴展到北極圈內較低緯度處。北極點自春分至秋分永晝達半年，北極圈上永晝僅一瞬間，北極圈內其他地點永晝自一瞬間至半年不等(北極圈內各處永晝或永夜的期長將於下篇文章中分析)。

冬至時北極圈上 12 時日出，12 時日落，北極圈為永夜區的極限。冬至時在北極圈外，正午前後有一段時間太陽在地平面之上，故北極圈外無永夜。冬至後，永夜自北極圈開始隨陽光可及處逐漸擴大而退縮到北極圈內較高緯度處。春分時在北極點整日皆可見太陽在地平面上，永夜在此時此處結束，而永晝在此時此處開始隨陽光可及處繼續逐漸擴大而擴展到北極圈內較低緯度處。北極點自秋分至春分永夜達半年，北極圈上永夜僅一瞬間，北極圈內其他地點永夜自一瞬間至半年不等。

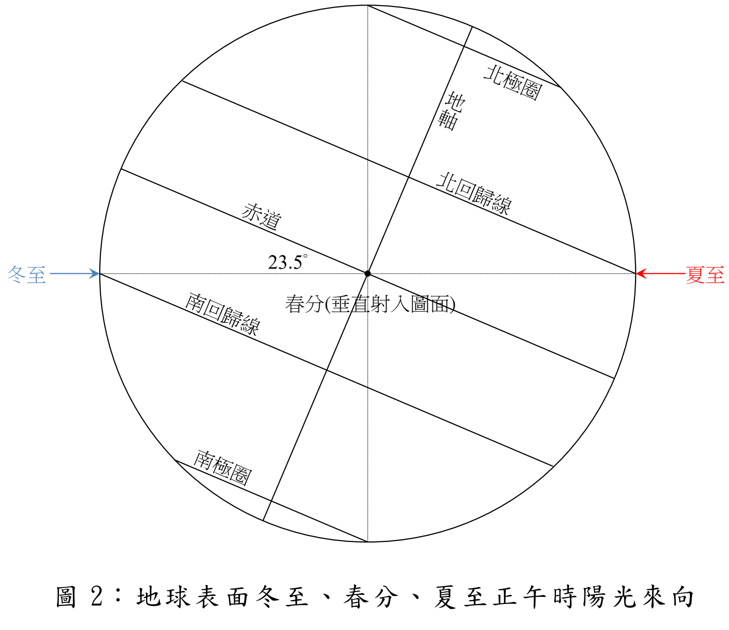

圖 2：地球表面冬至、春分、夏至正午時陽光來向

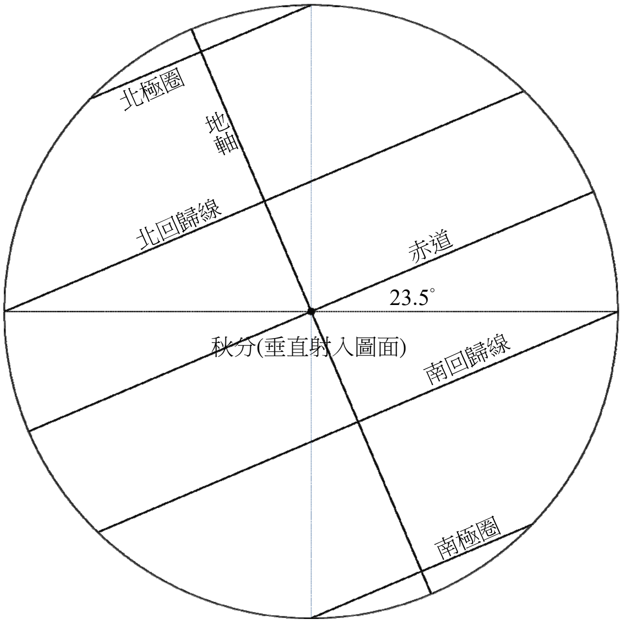

圖 3：地球表面秋分正午時陽光來向

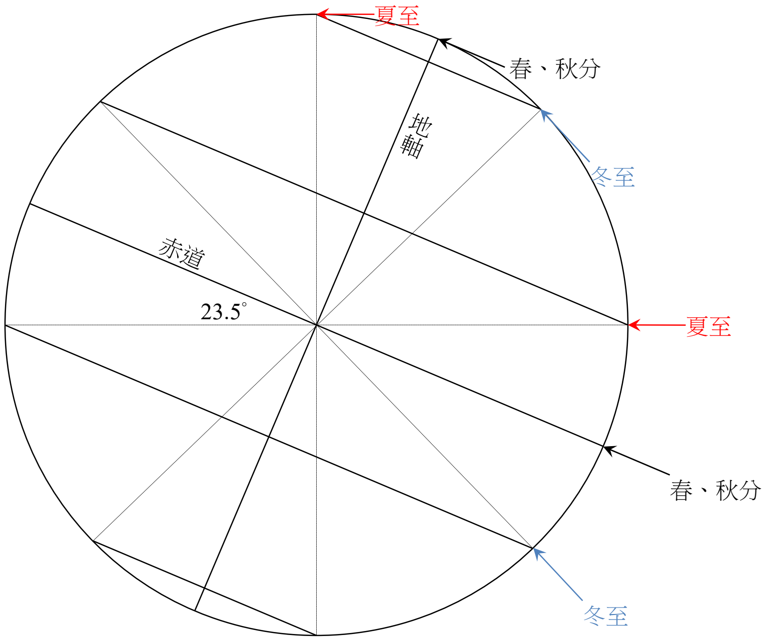

圖 4：正午時陽光來向合併圖

參、圓形或弧形的星星軌跡

接下來分析在何地理條件下可觀察到完整圓形的星星軌跡，或僅是圓的部份弧形的星星軌跡。地球表面某處所見星星軌跡的圓弧角寬與該處位置、星星方向的關係牽涉到球面上的直線和平面的關係，較難用數學上解析幾何的方式想像，本文提供一間接但較簡單的歸納分析方法。

一、北極點的情況

如前分析，北極點自秋分起至次年春分期間皆永夜，在該處觀察地平面以上的星星皆有以北極星為圓心的同心圓軌跡(圖 **5**)，距離北極星視角差 90°範圍內(即地平面以上)每個星星的軌跡皆為完整圓形(360°弧角寬)，即該處視線錐張角為 180°。

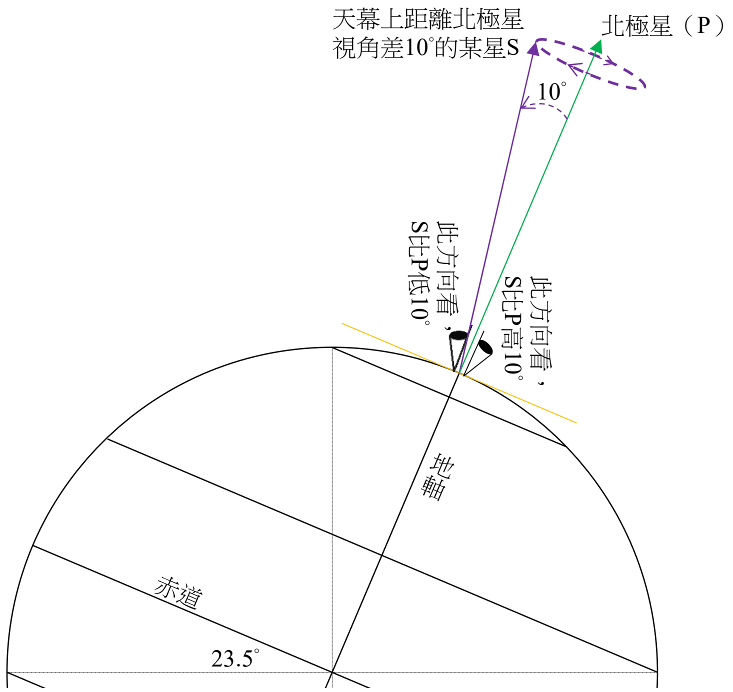

圖 5：自北極點永夜時觀察地平面以上的星星

二、北極圈上的情況

如前分析，北極圈上任一處冬至時為永夜，在該處觀察地平面以上的星星皆有以北極星為圓心的同心圓軌跡(圖 **6**)。圖中 A 處地平面正南方角高 0°的星星，星落與星出皆在該處南方，該星星的軌跡為一點(0°弧角寬)。圖中 A 處地平面正南方角高 23.5°方向(在北極圈平面上)的星星，當該處因地球自轉 90°而移至 B 處(6 小時後)，該星星的方向在 B 處地平面上的西方，即星落；在北極圈平面上與 B 處相對處(12 小時前)在東方有星出，該星星的軌跡為半圓弧形(180°弧角寬)。圖中 A 處地平面正南方角高 47°方向的星星，在 C 處觀察恰

好在地平面上(星落與星出皆在北方)，並且有一完整且最大的圓形軌跡(360°弧角寬)。故北極圈上任一處的視線錐張角為 180°-47°=133°，距離北極星視角差 66.5°範圍內(47°≦角高≦180°)每個星星的軌跡皆為完整圓形(360°弧角寬)，範圍外每個星星的軌跡為圓弧形(弧角寬由下式計算)。

由北極圈上任一處的地平面正南方起算某星角高(0°≦角高≦180°)與該星軌跡的弧角寬之關係歸納如下表：

角高(°)	0	23.5	47
弧角寬(°)	0	180	360

由上例舉的三點可推論弧角寬與角高(0°≦角高≦47°時)成正比，關係式為一通過原點的直線。

三、北極圈內的情況

(1)式之 47°與北極圈之緯度(66.5°N)有關，(1)式可寫為 0°≦角高≦(90°-66.5°)×2，弧角寬(°)=角高÷((90°-66.5°)×2)×360°；(90°-66.5°)×2≦角高≦180°，弧角寬皆為 360°。

推論在北極圈內任一處 (緯度 α°N，66.5°≦α°≦90°)永夜時，0°≦星星角高≦(90°-α°)×2，星星軌跡的弧角寬(°)=角高÷((90°-α°)×2)×360°；(90°-α°)×2≦角高≦180°，弧角寬皆為 360°。

0°≦角高≦47°，弧角寬(°)=角高÷47°×360°；47°≦角高≦180°，弧角寬皆為 360°　　(1)

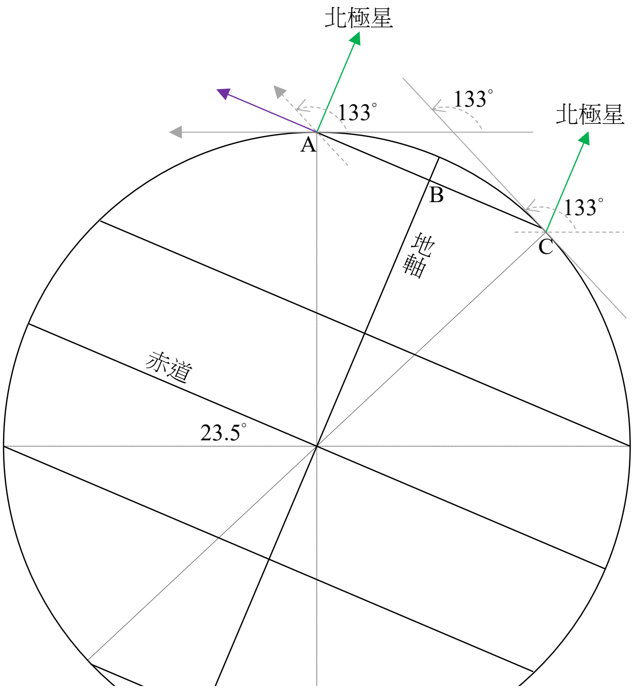

圖 6：自北極圈上任一處永夜時觀察地平面以上的星星

證明如下：

如前分析，北極圈內任一處(緯度 α°N，66.5°≦α°≦90°)永夜時，在該處觀察地平面以上的星星皆有以北極星為圓心的同心圓軌跡(圖 7)。圖中 A 處地平面正南方角高 0°的星星，星落與星出皆在該處南方，該星星的軌跡為一點(0°弧角寬)。圖中 A 處地平面正南方角高(90°-α°)方向(在 α°N 的緯度圈平面上)的星星，當該處因地球自轉 90°而移至 B 處(6 小時後)，該星星的方向在 B 處的地平面上的西方，即星落；在 α°N 的緯度圈平面上與 B 處相對處(12 小時前)在東方有星出，該星星的軌跡為半圓弧形(180°弧角寬)。圖中 A 處地平面正南方角高(180°-2α°)方向的星星，在 C 處觀察恰好在地平面上(星落與星出皆在北方)，並且有一完整且最大的圓形軌跡(360°弧角寬)。故北極圈內任一處(緯度 α°N，66.5°≦α°≦90°)的視線錐張角為 2α°，距離北極星視角差 α°範圍內((180°-2α°)≦角高≦180°)每個星星的軌跡皆為完整圓形(360°弧角寬)，範圍外每個星星的軌跡為圓弧形(弧角寬由下式計算)。

由北極圈內任一處(緯度 α°N，66.5°≦α°≦90°)的地平面正南方起算某星角高(0°≦角高≦180°)與該星軌跡的弧角寬之關係歸納如下表：

角高(°)	0	90-α	180-2α
弧角寬(°)	0	180	360

由上例舉的三點可推論弧角寬與角高(0°≦角高≦(180°-2α°)時)成正比，關係式為一通過原點的直線。

0°≦角高≦(180°-2α°)，弧角寬(°)=角高÷(180°-2α°)×360°；(180°-2α°)≦角高≦180°，弧角寬皆為 360° (2)

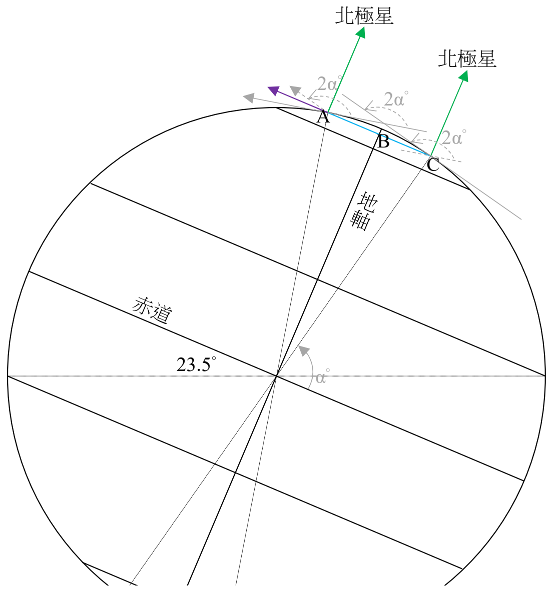

圖 7：自北極圈內任一處永夜時觀察地平面以上的星星

四、北極圈外虛擬永夜的情況

按本文之方法，可推導北半球北極圈外(0°≦緯度<66.5°)，假設無太陽光，星星圓弧軌跡的弧角寬。

北半球北極圈外任一處(緯度 β°N，0°≦β°<66.5°)，假設無太陽光，在該處觀察地平面以上的星星皆有以北極星為圓心的同心圓軌跡(圖 8)，星星圓弧軌跡的弧角寬分析方式同北極圈內的情況。圖中 A 處地平面正南方角高 0°的星星，星落與星出皆在該處南方，該星星的軌跡為一點(0°弧角寬)。圖中 A 處地平面正南方角高(90°-β°)方向(在 β°N 的緯度圈平面上)的星星，當該處因地球自轉 90°而移至 B 處(6 小時後)，該星星的方向在 B 的地平面上的西方，即星落。在 β°N 的緯度圈平面上與 B 處相對處(12 小時前)在東方有星出，該星星的軌跡為半圓弧形(180°弧角寬)。圖中 A 處地平面正南方角高(180°-2β°)方向的星星，在 C 處觀察恰好在地平面上(星落與星出皆在北方)，並且有一完整且最大的圓形軌跡(360°弧角寬)。故北半球北極圈外任一處(緯度 β°N，0°≦β°<66.5°)，假設無太陽光，該處的視線錐張角為 2β°，距離北極星視角差 β°範圍內((180°-2β°)≦角高≦180°)每個星星的軌跡皆為完整圓形(360°弧角寬)，範圍外每個星星的軌跡為圓弧形(弧角寬由下式計算)。

0°≦角高≦(180°-2β°)，弧角寬(°)=角高÷(180°-2β°)x360°；(180°-2β°)≦角高≦180°，圓弧角寬皆為 360°　　(3)

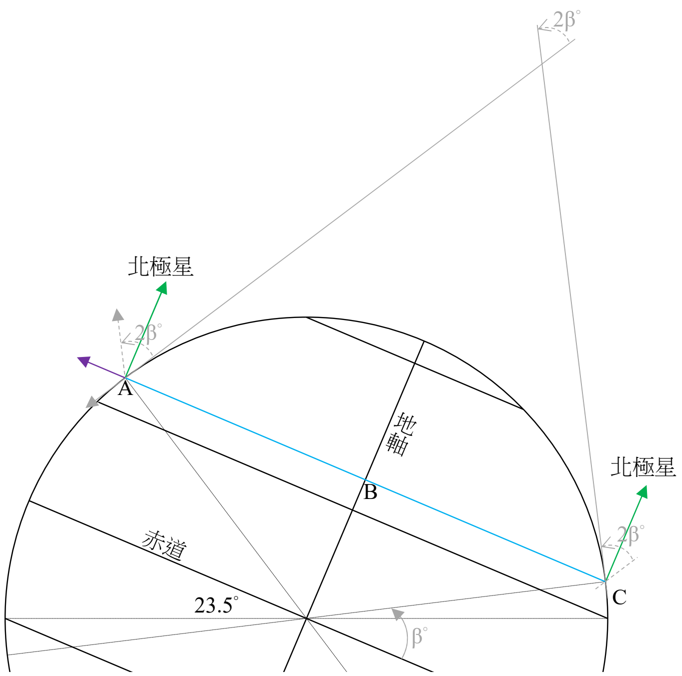

圖 8：自北半球北極圈外任一處虛擬永夜時觀察地平面以上的星星

由北半球北極圈外任一處(緯度 β°N，0°≦β°<66.5°)的地平面正南方起算某星角高(0°≦角高≦180°)與該星軌跡的弧角寬之關係歸納如下表：

角高(°)	0	90-β	180-2β
弧角寬(°)	0	180	360

由上例舉的三點可推論弧角寬與角高(0°≦角高≦(180°-2β°)時)成正比，關係式為一通過原點的直線。

五、赤道上虛擬永夜的情況

假設無太陽光，赤道(β=0°)的視線錐張角為 0°(圖 9)，在赤道上任一處觀察北極星(角高 180°)，其軌跡的弧角寬為 360°，此為在赤道所能觀察到的唯一 360°的弧角寬，但其實此圓弧軌跡已縮小成為一點，即北極星。在赤道觀察角高 90°(在赤道平面上)的某星，其軌跡的弧角寬為 180°，若在赤道某處 x 時可見該星在正東方星出，x+6 時可見該星在天頂，x+12 時可見該星在正西方星落。若在地軸南極方向的天幕上有一與北極星相對應的南極星，在赤道任一處觀察南極星(角高 0°)，其軌跡的弧角寬為 0°，即任一時刻皆為南極星的星出與星落，觀察北極星亦有此現象。如同北極星，其實南極星的圓弧軌跡亦已縮小成為一點，即南極星。

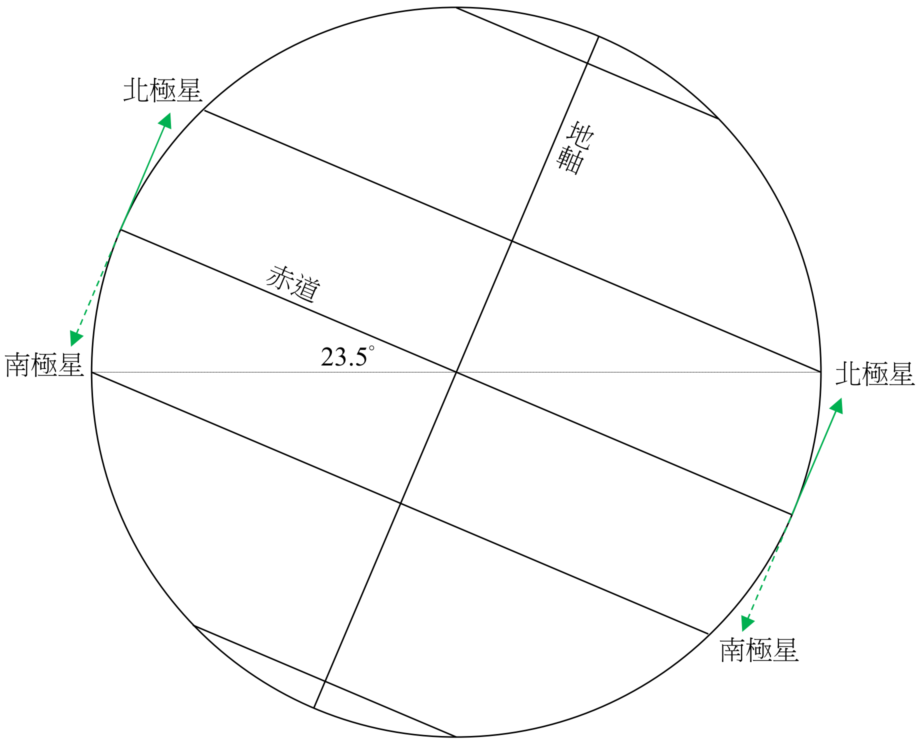

圖 9：自赤道上任一處虛擬永夜時觀察地平面以上的星星

結論：

在北半球緯度 $\alpha°$N($0° \leqq \alpha° \leqq 90°$)任一處永夜或無太陽光時，觀察星星的圓形軌跡。

當 $0° \leqq$ 星星角高 $\leqq (180°-2\alpha°)$，星星軌跡的弧角寬(°)=角高÷$(180°-2\alpha°) \times 360°$；

當 $(180°-2\alpha°) \leqq$ 角高 $\leqq 180°$，弧角寬皆為 360°。藉此式可瞭解到許多有趣的天文現象。

備註:

1. 讀者可參考本文的分析方法，自行分析南半球的星星軌跡。
2. 本文之分析圖皆以 PowerPoint 繪製，受限於該軟體的精度，每個角度有 -1.0~0°的誤差。