# 中學生通訊解題第 133-135 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
13301

設 $p$ 為質數。如果 $p^2+11$ 之正因數個數少於 11 個，試求所有滿足這樣條件的質數 $p$。

簡答： 2, 3, 5

【詳解】

若 $p=2$，則 $p^2+11=15=3\times5$ 有 4 個正因數。

若 $p=3$，則 $p^2+11=20=2^2\times5$ 有 6 個正因數。

若 $p=5$，則 $p^2+11=36=2^2\times3^2$ 有 9 個正因數。

接下來說明 $p>5$ 無解。

因為 $p$ 為質數，故 $p=6k+1$

或 $p=6k-1$

Case 1、 $p=6k+1$， $k\in N$

因為 $p^2+11=2^2\times3\times(3k^2+k+1)$

且 $3k^2+k+1=2$、$3k^2+k+1=2^2$、$3k^2+k+1=3$ 皆無正整數解

所以 $p^2+11$ 之正因數必超過 11 個

Case2、 $p=6k-1$， $k\in N$

因為 $p^2+11=2^2\times3\times(3k^2-k+1)$

且 $3k^2-k+1=2$、$3k^2-k+1=2^2$

皆無正整數解， $3k^2-k+1=3$ 僅有一組正整數解 $k=1$

所以當 $k=1$，

$p=5$ 之正因數不超過 11 個

由 Case1 與 Case2 知 $p>5$ 無解。

【解題評析】

此題為簡單的整數論問題，重點在整數標準分解式與其正因數個數間的關係。在討論的過程中有一個關鍵技巧是將大於 5 的質數分成 $p=6k\pm1$ 二種形式，因為 $(6k\pm1)^2+11=36k^2\pm12k+12=12(k^2\pm k+1)$，其中因數 $12=2^2\times3$ 保證 $p^2+11$ 的正因數個數必為 6 的倍數，大大的簡化了討論的過程。當然同學不一定要將質數依 mod 6 的餘數作分類，但討論的過程可能會稍加冗長。

問題編號
13302

已知 $f(x)$ 為 $R\to R$ 的函數，滿足

$f(1-x)=1-2f(x)$，求 $f(\frac{1}{2016})$ 之值。

簡答：$\frac{1}{3}$

【詳解】

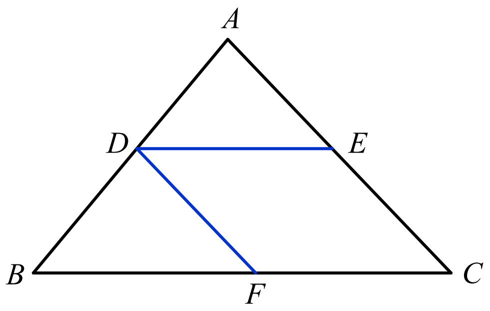
$$f(1-x)=1-2f(x)$$
$$\Rightarrow\ f(1-(1-x))=1-2f(1-x)$$
$$\Rightarrow\ f(x)=1-2f(1-x)$$
$$\Rightarrow\ f(x)=1-2\left[1-2f(x)\right]=-1+4f(x)$$
$$\Rightarrow\ f(x)=\frac{1}{3}$$
$$\therefore\ f(\frac{1}{2016})=\frac{1}{3}\text{。}$$

【解題評析】

此題應注意 $(1-x)+x=1$，故將 $f(1-x)$ 中的 $x$ 以 $(1-x)$ 代入，會得到 $f(x)$，從而導出一個 $f(x)$ 與 $f(1-x)$ 的二元一次聯立方程組。

| 問題編號 |
|---|
| 13303 |

設 $D$ 為 $\triangle ABC$ 邊 $\overline{AB}$ 上的一點，作 $\overline{DE}//\overline{BC}$ 交 $\overline{AC}$ 於點 $E$，作 $\overline{DF}//\overline{AC}$ 交 $\overline{BC}$ 於點 $F$。已知 $\triangle ADE$、$\triangle DBF$ 的面積分別為 $\sqrt[3]{2}$、$\sqrt[3]{4}$，求四邊形 $DECF$ 的面積。




簡答：$2\sqrt{2}$

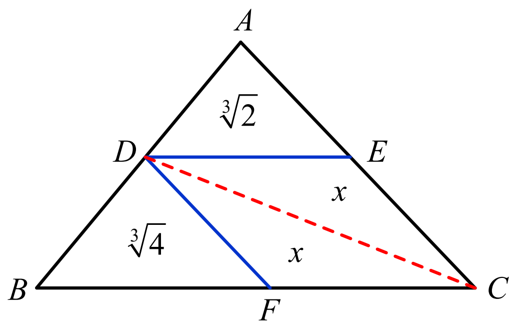
【詳解】

連接 $\overline{CD}$，令 $\triangle CDE=\triangle CDF=x$

由 $\triangle ADE\sim\triangle DBF$ 可知

$$(\frac{\triangle ACD}{\triangle BCD})^2=(\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}})^2=\frac{\triangle ADE}{\triangle DBF}$$
$$\Rightarrow\ (\frac{x+\sqrt[3]{2}}{x+\sqrt[3]{4}})^2=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$
$$\Rightarrow\ x^2+2\sqrt[3]{4}x+2\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}(x^2+2\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})$$
$$\Rightarrow\ (\sqrt[3]{2}-1)x^2=2(\sqrt[3]{2}-1)$$
$$\Rightarrow\ x^2=2,\ x=\sqrt{2}$$

故四邊形 $DECF$ 的面積 $=2x=2\sqrt{2}$




【解題評析】

本題為簡易的幾何關係，大部份的同學能夠利用 $\triangle ADE \sim \triangle DBF \sim \triangle ABC$ 的相似關係，找出邊的平方比為面積比而求出答案，少數同學在根號的計算上出錯，相當可惜。

| 問題編號 |
|---|
| 13304 |

設 $\overline{abcd}$ 是一個四位數（$\overline{abcd}$ 代表 $1000a+100b+10c+d$），其中 $a,b,c,d$ 彼此互異且都不為 0。將 $\overline{abcd}$ 各位數字重新排列後可得一個最大數和一個最小數，例如將 9527 重新排列後，可得一個最大數 9752 和最小數 2579。若將如此產生之最大數與最小數相減後恰得到原來的四位數，試求此四位數。

簡答：6174

【詳解】

設最大數為 $x_4x_3x_2x_1$，

則最小數為 $x_1x_2x_3x_4$，

$$\begin{array}{rcccc} & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \\ - & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline & a & b & c & d \end{array}$$

$$\begin{cases} 10+x_1-x_4=d \\ 10+x_2-1-x_3=c \\ x_3-1-x_2=b \\ x_4-x_1=a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+d=10 \\ b+c=8 \\ x_3-x_2=b+1\geq 2 \\ a=x_4-x_1\geq x_3-x_2+2\geq 4 \end{cases}$$

滿足上式之 $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,2,6,9)$，$(1,3,5,9)$，$(1,2,7,8)$，$(2,3,5,8)$ $(2,3,6,7)$，$(1,4,6,7)$

驗算後可得 $\overline{abcd}=6174$。

【解題評析】

此題屬於組合問題，只要把最大數和最小數相減，所得到的幾條代數式，加上彼此間的大小關係，以及每個數碼都只能是 1 到 9，這些資訊統整起來，再仔細耐心地討論刪除錯誤情況即可。此次參與作答本題的同學們，雖然各走不同的討論路線，但是都能得到正確一致的結果，相當不錯！

問題編號
13305

設函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，對一切 $x\in[-1,1]$ 都有 $|f(x)|\le 1$。
求證：對一切 $x\in[-1,1]$ 都有 $|3ax+2b|\le 6$。

證明：

由 $\begin{cases} f(0)=c \\ f(1)=a+b+c \\ f(-1)=a-b+c \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2}\left[f(1)+f(-1)-2f(0)\right] \\ b=\frac{1}{2}\left[f(1)-f(-1)\right] \\ c=f(0) \end{cases}$$

因為對一切 $x\in[-1,1]$ 都有 $|f(x)|\le 1$，所以 $|f(0)|\le 1$, $|f(1)|\le 1$, $|f(-1)|\le 1$

令 $g(x)=3ax+2b$，

當 $x\in[-1,1]$ 時，其圖形是一線段。而

$$|g(-1)|=|3a-2b|=|\frac{3}{2}\left[f(1)+f(-1)-2f(0)\right]$$

$$-\left[f(1)-f(-1)\right]|$$

$$=|\frac{1}{2}f(1)+\frac{5}{2}f(-1)-3f(0)|$$

$$\le\frac{1}{2}|f(1)|+\frac{5}{2}|f(-1)|+3|f(0)|\le 6$$

$$|g(1)|=|3a+2b|$$

$$=|\frac{3}{2}\left[f(1)+f(-1)-2f(0)\right]$$

$$+\left[f(1)-f(-1)\right]|$$

$$=|\frac{5}{2}f(1)+\frac{1}{2}f(-1)-3f(0)|$$

$$\le\frac{5}{2}|f(1)|+\frac{1}{2}|f(-1)|+3|f(0)|\le 6$$

故對一切 $x\in[-1,1]$ 都有 $|3ax+2b|\le 6$。

【解題評析】

本題有 3 人參與徵答，得到 7 分滿分的有 2 人；此題關鍵在於用函數值表示係數，再利用三角不等式與一次函數的單調性去找出所求。

問題編號
13401

證明從任意 5 個互質的三位數中能選出 4 個數是互質的。

證明：

令 5 個互質的三位數為 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$，

設此命題不成立，

則 $\begin{cases}(a_1,a_2,a_3,a_4)=d_1\\(a_1,a_2,a_3,a_5)=d_2\\(a_1,a_2,a_4,a_5)=d_3\\(a_1,a_3,a_4,a_5)=d_4\\(a_2,a_3,a_4,a_5)=d_5\end{cases}$，其中

$d_1,d_2,d_3,d_4,d_5$ 兩兩互質且均不為 1，

而知 $d_1>d_2>d_3>d_4>d_5\ge 2$ 時，

$a_1=b_1d_1d_2d_3d_4\ge 11\times 7\times 5\times 3=1155$，

與 $a_1$ 是三位數矛盾！

所以 $d_1,d_2,d_3,d_4,d_5$ 中必有一數為 1。

【解題評析】

本題證明的方法是使用反證法，假設結論不成立，推得矛盾，以得原結論成立。

| 問題編號 |
|---|
| 13402 |

設數列 $\langle a_n\rangle$ 的遞迴關係式為

$\begin{cases}a_1=\dfrac{1}{2}\\a_{n+1}=a_n^{\ 2}+a_n\ ,\ n\ge 1\end{cases}$，求 $\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{2016}\frac{1}{a_k+1}\right]$

的值。（其中 $[x]$ 表示小於或等於 $x$ 的最大整數。）

簡答：1

【詳解】

考慮 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n(a_n+1)}=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_n+1}$

$\Rightarrow\ \dfrac{1}{a_n+1}=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}$，

於是對消後可得

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2016}\frac{1}{a_k+1}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{2017}}=2-\frac{1}{a_{2017}}$，

注意 $a_1=\dfrac{1}{2},\ a_2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4},$

$a_3=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{3}{4}=\dfrac{21}{16}>1$，

及 $a_1<a_2<\cdots<a_{2017}$，

則 $1=2-1<2-\dfrac{1}{a_{2017}}<2-0=2$，

故 $\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{2016}\frac{1}{a_k+1}\right]=1$

【解題評析】

1. 本題為中等代數的問題，只有 1 人徵答，且無人答對。
2. 若無法推出 $\dfrac{1}{a_n+1}=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}$ 的式子，則不能將原式對消至 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2016}\frac{1}{a_k+1}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{2017}}$。

   需要再觀察前幾項，則可得 $a_1<a_2<\cdots<a_{2017}$ 的關係。

| 問題編號 |
|---|
| 13403 |

$\triangle ABC$ 中 $\overline{AB}>\overline{AC}$ ， $M,D,H$ 依序為 $\overline{BC}$ 上的點，使得過 $A$ 的高 $\overline{AH}=15$，$\angle A$ 的內角平分線 $\overline{AD}=17$ ，過 $A$ 的中線 $\overline{AM}=25$ ，求 $\overline{BC}^2$ 之值。

簡答：2310

【詳解】

由畢氏定理知 $\overline{DH}=8,\overline{MD}=12$ ，假設

$\overline{BM}=x$ ，則 $\overline{HC}=x-20$ 。

由畢氏定理知

$\overline{AB}=\sqrt{(x+20)^2+15^2}=\sqrt{x^2+40x+625}$ ，

$\overline{AC}=\sqrt{(x-20)^2+15^2}=\sqrt{x^2-40x+625}$

角平分線公式：

$\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{AD}^2+\overline{BD}\times\overline{DC}$ ，

即 $\sqrt{x^2+40x+625}\times\sqrt{x^2-40x+625}$

$=289+(x+12)(x-12)$

$\Rightarrow (x^2+625)^2-1600x^2=(x^2+145)^2$

$\Rightarrow (x^2+625)^2-(x^2+145)^2=1600x^2$

$\Rightarrow (2x^2+770)\cdot 480=1600x^2$

$\Rightarrow x^2=\dfrac{1155}{2}$

所求即 $4x^2=2310$

【解題評析】

本題綜合垂線、角平分線及中線，需先判斷三條線之位置再使用畢氏定理及角平分線成比例等性質解。

| 問題編號 |
|---|
| 13404 |

將 $12\times12$ 的方格紙板的一角減去一個 $2\times2$ 的正方形，問餘下的 $140$ 個方格能否剪成 $35$ 個 $4$ 小格形成的 $L$ 型小紙片？

簡答：不能

【詳解】

將 $12\times12$ 的方格紙中，

第 $1,3,5,7,9,11$ 各列的各小方格內填上數 $1$，

第 $2,4,6,8,10,12$ 各列的各小方格內填上數 $-1$，

由於減去的一角是 $2\times2$ 的正方形，於是剩下 $140$ 個方格內的數字和為 $0$ 。

若題目的要求可以達到，

由每塊 $L$ 型小紙片蓋住的數字和為 $2$ 或 $-2$，

並設其中有 $x$ 塊內的數字和為 $2$ ，

其餘 $35-x$ 塊內的數字和為 $-2$ ，

於是 $2x+(-2)(35-x)=0$ ， $x=\dfrac{35}{2}$ 不是整數，矛盾。

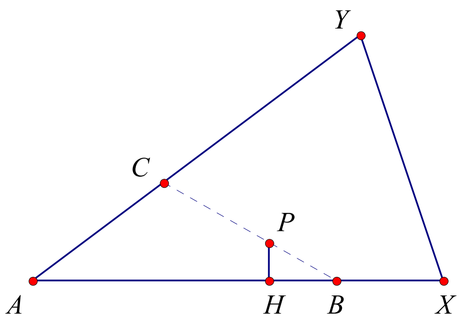
因此，題設的要求做不到。

【解題評析】

本題共有三位同學參與解題，解法可將每個小方格利用黑白顏色討論，也可填入正一與負一，然後利用奇數與偶數性質討論。

| 問題編號<br>13405 |
| --- |

如下圖。$\triangle AXY$ 中，已知 $\overline{AX}=\overline{AY}=60$，$\overline{XY}=12\sqrt{10}$，點 P 在 $\triangle AXY$ 內部，$\overline{AH}=33$，$\overline{PH}$ 垂直 $\overline{AX}$ 於 H，$\overline{PH}=6$。今過點 P 引一直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 交 $\overline{AX}$ 於 B，交 $\overline{AY}$ 於 C，求 $\triangle ABC$ 之最小周長。




簡答：90

【詳解】

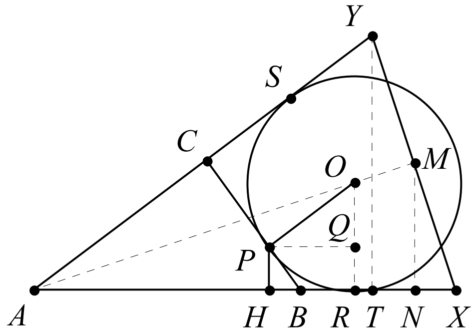
(1) 三角形的半周長，等於其一頂點至該頂點所對應的旁切圓的切線段之長。

(2) 如右圖，$\triangle ABC$ 中。

設圓 $O$ 為 $\angle A$ 所對旁切圓，則 $\triangle ABC$ 之周長等於 $2\overline{AD}$。

設圓 $O$ 與 $\overline{BC}$ 相切於點 $F$，今過點 $F$ 任意作一異於 $BC$ 之直線分別交直線 $AB$、$AC$ 於點 $H$、$K$，則存在直線 $MN$ 與直線 $HK$ 平行，且直線 $MN$ 與圓 $O$ 相切於點 $G$，點 $M$、$N$ 分別在直線 $AB$、$AC$ 上。如此，圓 $O$ 同為 $\triangle ABC$ 與 $\triangle AMN$ 之旁切圓，所以這兩個三角形的半周長同為點 $A$ 至圓 $O$ 的切線段 $\overline{AD}$ 之長，即 $\triangle ABC$ 與 $\triangle AMN$ 周長相等，但 $\triangle AMN$ 之周長小於 $\triangle AHK$ 之周長，而知 $\triangle ABC$ 之周長小於 $\triangle AHK$ 之周長。

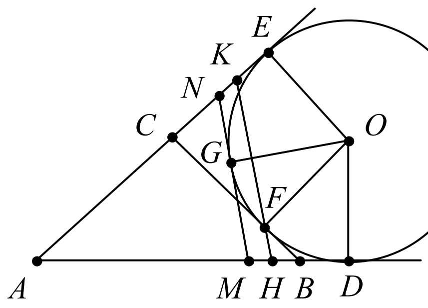
因此，過 $\angle XAY$ 內部一點 $P$ 引一直線 $BC$ 分別交 $\overline{AX}$、$\overline{AY}$ 於點 $B$、$C$，若要 $\triangle ABC$ 有最小周長，則 $\angle A$ 所對旁切圓應切 $\overline{BC}$ 於點 $P$。




(3) $\triangle AXY$ 中，

已知 $\overline{AX}=\overline{AY}=60$，$\overline{XY}=12\sqrt{10}$，令 $\overline{XY}$ 之中點為 $M$，則 $\overline{AM}\perp\overline{XY}$，$\overline{AM}^2=60^2-(6\sqrt{10})^2=3240$，作 $\overline{YT}\perp\overline{AX}$，$\overline{MN}\perp\overline{AX}$，則 $\triangle AXY$ 之 2 倍面積為 $\overline{XY}\times\overline{AM}=\overline{AX}\times\overline{YT}$，

故 $12\sqrt{10}\times\sqrt{3240}=60\overline{YT}$，得 $\overline{YT}=36$，$\overline{MN}=18$，$\overline{AN}=\sqrt{3240-18^2}=54$。




設圓 $O$ 經過點 $P$ 且與 $\overline{AX}$、$\overline{AY}$ 分別相切於點 $R$、$S$，則點 $O$ 在 $\overline{AM}$ 上，$\overline{OP}=\overline{OR}$，而知△$AOR$ 相似於△$AMN$，即 $\overline{AR}:\overline{OR}=\overline{AN}:\overline{MN}=54:18=3:1$。設 $\overline{AR}=3x$，$\overline{OR}=x$，作 $\overline{PQ}\perp\overline{OR}$，則△$OPQ$ 是直角三角形，其中 $\overline{OP}=\overline{OR}=x$，$\overline{OQ}=\overline{OR}-\overline{QR}=\overline{OR}-\overline{PH}=x-6$，$\overline{PQ}=\overline{AR}-\overline{AH}=3x-33$，依據商高定理：$\overline{OP}^2=\overline{OQ}^2+\overline{PQ}^2$，得 $x^2=(x-6)^2+(3x-33)^2$，化簡為 $3x^2-70x+375=0$，解得 $x=15$ 或 $x=\dfrac{25}{3}$，取其中較大之解為 $x=15$，得 $\overline{AR}=3x=45$。

如此，經過點 P 作直線 BC 與 $\overline{OP}$ 垂直又分別交 $\overline{AX}$、$\overline{AY}$ 於點 B、C，圓 O 與 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BC}$ 分別相切於點 R、S、P，即△ABC 之一旁切圓，如(2)所述，可知此三角形即符合條件而有最小周長者，其周長等於 2$\overline{AR}$。因為 2$\overline{AR}$ = 90，所以所求△ABC 之最小周長為 90。

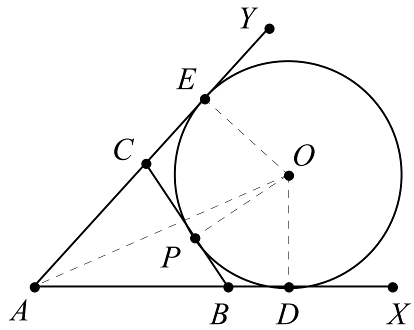
【解題評析】

三角形的半周長，等於其任意一頂點至此頂點所對應的旁切圓之切線段長，此一性質不難理解，概述如下：

如右圖。△ABC 中，設圓 O 分別與直線 AB、AC、BC 相切於點 D、E、P，則因為自圓外一點作圓的切線，其二切線段等長，所以 $\overline{AD}=\overline{AE}$，$\overline{BD}=\overline{BP}$，$\overline{CE}=\overline{CP}$，得 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BP}+\overline{CP}+\overline{AC}$

$=\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{AC}+\overline{CE}=\overline{AD}+\overline{AE}$，

即△ABC 的周長等於 $\overline{AD}+\overline{AE}=2\overline{AD}$。




因此，求過點 $P$ 之△$ABC$ 周長的最小值，即求 2$\overline{AD}$ 的最小值，此一最小值出現在 $\overline{BC}$ 與旁切圓相切於點 $P$ 時。從而可知，$\overline{BC}$ 之尋求可由找出圓 $O$ 入手。

以上詳解僅利用代數方法計算點 $P$ 與所求圓心 $O$ 的距離，來定位旁切圓，至於「如何尺規作圖畫出圓 $O$？」，並未述及。因為滿足「經過定點 $P$ 而與角之兩邊皆相切的圓」共有兩個，所以詳解中的 $x$ 有二解，而「為何 $x$ 須取較大者？」這兩個問題，同學可再想想。

合於本題條件而有最小周長的三角形恰好是直角三角形，這是數據設定上的巧遇，並非一般情況。

問題編號
13501

設 $P=\sum_{k=1}^{2017} k^4$，求 $P$ 的個位數字。

簡答：9

【詳解】

首先注意到，$1^4+2^4+3^4+\cdots+10^4$ 的個位數字與
$1+6+1+6+5+6+1+6+1+0=33$ 的個位數字相同為 3。

若 $a,b$ 為正整數，則以下展開式可知：

$(10a+b)^4$ 的個位數字與 $b^4$ 的個位數字相同。

所以 $1^4+2^4+3^4+\cdots+2010^4$ 的個位數字與 $3\times 201$ 的個位數字相同為 3，

又 $2011^4+2012^4+2013^4+2014^4+2015^4+2016^4+2017^4$ 的個位數字與 $1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+6^4+7^4$ 的個位數字相同為 6，

故 $P$ 的個位數字與 $3+6=9$ 的個位數字相同為 9。

【解題評析】

1. 此題為簡易的數論問題，有 5 位同學用同餘(mod)的方法進行計算。
2. 只要能夠掌握 $1^4+2^4+3^4+\cdots+10^4$ 的個位數字為 3，即可往下推論出答案。

問題編號
13502

$A,B,C$ 是三個有理數的集合。$A$ 是由 $\frac{1}{1000},\frac{1}{999},\ldots,\frac{1}{3},\frac{1}{2},1,2,3,\ldots,999,1000$ 共 1999 個有理數的集合，從集合 $A$ 中取一個數 $a$，令 $b=\dfrac{1}{a-\frac{2}{7}}$，得到集合 $B$ 有 1999 個有理數。令 $c=\dfrac{1}{b-\frac{2}{7}}$，又得到集合 $C$ 有 1999 個有理數。試問 $A,B,C$ 三組總計 5997 個有理數中共有多少個負數？

簡答：2991

【詳解】

由 $b<0$，得 $a<\frac{2}{7}$。所以當 $a$ 取 $\frac{1}{1000},\frac{1}{999},\ldots,\frac{1}{4}$ 這 997 個值時，$b$ 是負數，故 $B$ 集合有 997 個負數。

再由 $c<0$，得 $\dfrac{1}{a-\frac{2}{7}}<\dfrac{2}{7}$。顯然，當 $a<\frac{2}{7}$ 時，皆有 $c<0$，$c$ 取得 997 個負值；當 $a>\frac{2}{7}$ 時，若 $\dfrac{1}{a-\frac{2}{7}}<\dfrac{2}{7}$，得 $a>3\frac{11}{14}$，即

$a$ 取 4, 5, ⋯, 1000 這 997 個值時，$c$ 也取得負值。故 $C$ 集合共有 1994 個負數。

故 $A,B,C$ 中共有 2991 個負數。

【解題評析】

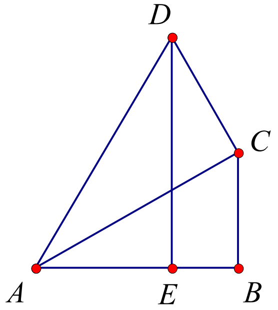
1. 本題徵答人數共 7 人，全部答對得 7 分者有 3 人。

2. 本題中 $b=\dfrac{1}{a-\frac{2}{7}}$，容易觀察出只要分母 $a-\dfrac{2}{7}<0$，則 $b$ 為負數。同理 $c=\dfrac{1}{b-\frac{2}{7}}$ 也是依照分母大於 0 或是小於 0 分類討論，得 $C$ 集合有 1994 個。

3. 有同學將 $b=\dfrac{1}{a-\frac{2}{7}}$ 代入解不等式，知 $a$ 取 4, 5, ⋯, 1000, $\dfrac{1}{1000},\dfrac{1}{999},\dots,\dfrac{1}{4}$ 時 $c$ 為負數，故 $C$ 集合有 1994 個，此亦為很好的方法。

| 問題編號 |
|---|
| 13503 |

如下圖。四邊形 ABCD 中，已知∠DAC = ∠CAB、點 E 在 $\overline{AB}$ 上，$\overline{DE}\perp\overline{AB}$，$\overline{CB}\perp\overline{AB}$，$\overline{DC}\perp\overline{AC}$，求證：$\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BE}$。



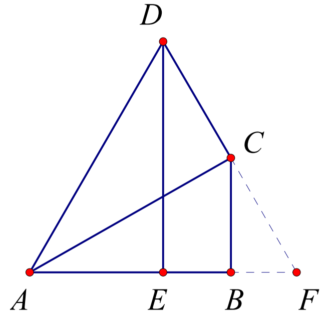

證明：

(1) 延長 $\overline{AB}$ 與 $\overline{DC}$，相交於點 $F$，如右圖；

(2) $\because\ \overline{AC}\perp\overline{DC}$，
$\therefore \angle ACD$、$\angle ACF$ 都是直角，
即 $\angle ACD=\angle ACF$，
又已知 $\angle DAC=\angle CAB=\angle FAC$，
而 $\overline{AC}=\overline{AC}$，
故 $\triangle ACD$ 與 $\triangle ACF$ 全等，(ASA)
得 $\overline{AD}=\overline{AF}$，$\overline{CD}=\overline{CF}$；

(3) $\triangle DEF$ 中，
$\because\ \overline{DE}\perp\overline{AB}$，$\overline{CB}\perp\overline{AB}$
$\therefore\ \overline{CB}\,//\,\overline{DE}$
而點 $C$ 為 $\overline{DF}$ 中點，得點 $B$ 為 $\overline{EF}$ 中點，即 $\overline{BE}=\overline{BF}$；

(4) 因此，$\overline{AD}=\overline{AF}=\overline{AB}+\overline{BF}$
$=\overline{AB}+\overline{BE}$。得證。



另證：

(1) 作 $\overline{CH}$ 垂直 $\overline{DE}$ 於 $H$，

$\because \overline{DE} \perp \overline{AB}$　　$\therefore \overline{CH} \,//\, \overline{AB}$

得 $\angle ACH = \angle CAB$；

(2) $\because \overline{DC} \perp \overline{AC}$，$\overline{CH} \perp \overline{DE}$，

$\angle DAC = \angle CAB$

$\therefore \angle CDH = \angle CAB = \angle DAC$；

(3) $\because \overline{CH} \perp \overline{DE}$，$\overline{CB} \perp \overline{AB}$，$\overline{DC} \perp \overline{AC}$

$\therefore \angle CHD = \angle CBA = \angle DCA$

而知 $\triangle CHD \sim \triangle CBA \sim \triangle DCA$，

得 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$，$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$，

$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{HC}}{\overline{DC}}$，

故 $\overline{AD} = \dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}{\overline{AB}}$

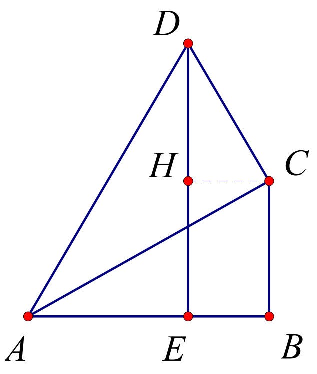
$= \overline{AB} + \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \cdot \overline{BC}$

$= \overline{AB} + \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \cdot \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CH}$；

(4) $\because$ 四邊形 $EBCH$ 是矩形

$\therefore \overline{CH} = \overline{BE}$

得證：$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BE}$。




【解題評析】

本題構思容易，證法不難。

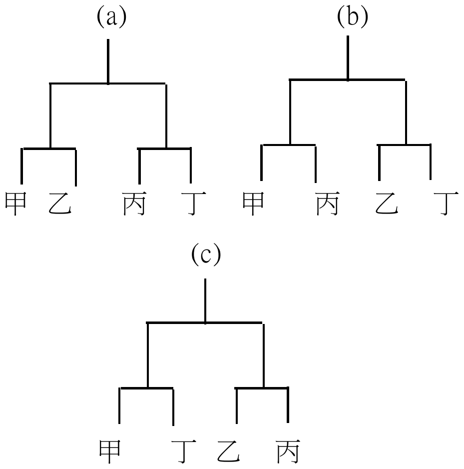
以上列出兩種證法。第一種證法：從構造兩個全等三角形出發，搭配「經過三角形之一邊的中點而與第二邊平行的直線，必定經過第三邊的中點」之基本而廣為同學所知的性質，即可順利得證。第二種證法：從尋找相似三角形出發，透過三角比的掌握，來確立所要求證之線段間的關係。

事實上，圖中之 $\angle CHD = \angle CBA = \angle DCA$，設這三個角之度量皆為 $\theta$，以後同學學會了三角比，sin、cos 將成為思考這類問題的有利工具。經由三角比來看問題，參照本題附圖，得 $\sin\theta = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{BE}}{\overline{CD}}$、$\cos\theta = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$，而知 $\sin^2\theta = \dfrac{\overline{BE}}{\overline{AD}}$，$\cos^2\theta = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$，因此，$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BE}$，也就是 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$，這個公式導源自商高定理，是三角比的一個基礎性質，也是本題題目之設計的主要依據。

再看圖中，由三角比定義，亦知 $\cos 2\theta = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$，因此，$\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{BE}$，也就是 $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$，這一個公式稱為「倍角公式」，其證明無須文字，可以根據附圖查知，所謂「以圖明之，不證自明」，同學以後在學習相關內容時，要能慎思明辨才好。

問題編號
13504

甲、乙、丙、丁四支籃球隊，由下列(a)(b)(c)三種賽程擇一進行單淘汰賽（輸一場即出局）。




已知甲勝其他任何一隊的機率皆為 $\dfrac{2}{3}$ ，

乙勝其他任何一隊的機率皆為 $\dfrac{1}{3}$ ，丙、丁實力相當，且比賽沒有和局。試問對丙而言，採用(a)(b)(c)三種賽程中何者，其獲得冠軍的機率最高？

簡答：(c)

【詳解】

$$p(a)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)=\frac{6}{27},$$

$$p(b)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{27}$$

$$p(c)=\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{27}$$

故對丙而言，三種賽程中以(c)獲得冠軍的機率最高。

【解題評析】

本題為簡易機率問題，只要概念與計算正確，便可以迎刃而解。此題共有 8 人作答，其中 6 人正確解出。

問題編號
13505

全班有 50 人參加合唱比賽，要排成三排，且每一排的人數要比前一排的人數多，請問有多少種隊形排法？（例：第一排 6 人，第二排 15 人，第三排 29 人，視為一種排法）。

簡答：144

【詳解】

〔法一〕

將各排人數寫成數對，考慮第三排的人數，從最多的 47 人到最少的 18 人分類如下：

$(1,2,47)$ 共 1 種

$(1,3,46)$ 共 1 種

$(1,4,45),(2,3,45)$ 共 2 種

$(1,5,44),(2,4,44)$ 共 2 種

$(1,6,43),(2,5,43),(3,4,43)$ 共 3 種

$(1,7,42),(2,6,42),(3,5,42)$ 共 3 種

……

$(1,22,27),(2,21,27),(3,20,27),$

$,......,(11,12,27)$ 共 11 種

$(1,23,26),(2,22,26),(3,21,26),$

$,......,(11,13,26)$ 共 11 種

$(1,24,25),(2,23,25),(3,22,25),$

$,......,(11,14,25),(12,13,25)$ 共 12 種

$(3,23,24),......,(12,14,24)$ 共 10 種

$(5,22,23),......,(13,14,23)$ 共 9 種

$(7,21,22),......,(13,15,22)$ 共 7 種

$(9,20,21),......,(14,15,21)$ 共 6 種

$(11,19,20),......,(14,16,20)$ 共 4 種

$(13,18,19),......,(15,16,19)$ 共 3 種

$(15,17,18)$ 共 1 種

總共 $2\times\frac{(1+11)\times 11}{2}+12+10+9+7$

$+6+4+3+1=184$ 種

〔法二〕

第一排人數是 $2k-1$ 人時，第二排人數將有 $2k\sim(25-k)$，共 $(26-3k)$ 種可能；第一排人數是 $2k$ 人時，第二排人數將有 $(2k+1)\sim(24-k)$，共 $(24-3k)$ 種可能。

故所求為

$$\sum_{k=1}^{8}(26-3k)+\sum_{k=1}^{7}(24-3k)$$

$$=26\times 8-3\sum_{k=1}^{8}k+24\times 7-3\sum_{k=1}^{7}k$$

$$=208-3\times\frac{(1+8)\times 8}{2}+168-3\times\frac{(1+7)\times 7}{2}$$

$$=208-108+168-84=184$$

共 184 種。

【解題評析】

本題需簡單按奇偶數分類，可觀察規律或使用 Sigma 加總運算而得。