有心力運動軌道封閉性的探討

黃光照
臺北市立第一女子高級中學

壹、前言

71 年日間部大學聯考考了一題選擇題：假設萬有引力係與兩物體間距離之立方成反比，如以 R 及 T 分別代表行星繞日作圓周運動時之軌道半徑及週期，則下列各種比值中何者對所有行星而言均相同？(A) $\frac{R^3}{T^2}$　(B) $\frac{R^2}{T^3}$　(C) $\frac{R}{T^2}$　(D) $\frac{R^2}{T}$　(E) $\frac{R}{T}$。但根據伯特蘭定理(Bertrand's Theorem)，在有心力作用下，僅在力的形式為 $F(r)=-\frac{c}{r^2}(c>0)$ 或 $F(r)=-cr(c>0)$ 時，其軌道才會是封閉的。若萬有引力與兩物體間距離之立方成反比時，行星的軌道是不封閉的，更遑論軌道是具有週期的，因此，該命題是不成立的。數十年來，不論是各種參考書籍、補習班講義，或是各種大大小小的考試，都時常出現該題，這對學生在學習上來說應該是負面的。本文作者將對此做詳細的說明。

貳、二體運動問題的簡化

首先將行星繞日的二體問題予以簡化，並將行星與太陽皆視為質點。假設在孤立系統中，位置向量為 $\vec{r}_1$ 和 $\vec{r}_2$ 處，有質量各為 m_1 和 m_2 的質點 1(行星)和質點 2(太陽)，僅受到彼此間的有心力作用，於慣性坐標系中寫下兩質點的運動方程：

$$\begin{cases}\vec{F}_{12}=m_1\ddot{\vec{r}}_1\\ \vec{F}_{21}=m_2\ddot{\vec{r}}_2\end{cases} \tag{1}$$

其中 $\vec{F}_{ij}$ 表質點 j 對質點 i 所施之力。

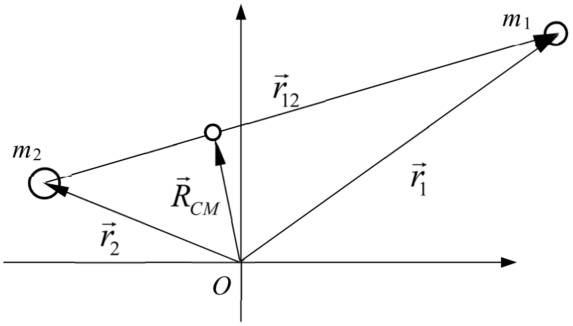

圖 1、坐標系間的轉換

參考圖 1，現將 $\vec{r}_1$ 、 $\vec{r}_2$ 以質心坐標 $\vec{R}_{CM}$ 和 $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ 表示，得

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R}_{CM} + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}_{12} \\ \vec{r}_2 = \vec{R}_{CM} - \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}_{12} \end{cases} \tag{2}$$

在孤立系統中質心不受外力 $\therefore \ddot{\vec{R}}_{CM} = 0$ ， 將(2)式代入(1)式，得

$$\vec{F}_{12} = m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\vec{r}}_{12} = \mu\ddot{\vec{r}}_{12} \tag{3}$$

其中 $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (reduced mass)，稱折合質量或縮減質量。

由上述可知，二體問題可以等價為將其中的一個質點 2 當觀察者，並訂為新的坐標原點，而研究另一質點 1 受到質點 2 連心力的作用而呈現的運動。一般情況下，質點 2 是可以有加速度，為非慣性坐標系，故要使用『牛頓第二運動定律』，就必須修正，即對質點 1 的質量做修正，將質量 m_1 改為折合質量 $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ 便可。

參、軌道穩定的條件

首先要行星運行的軌道是封閉的，就必須軌道是穩定的。今以質點 2 為極坐標的原點，則質點 1 的位置可以極坐標表示為 $\vec{r} = r\vec{e}_r$，其中 $\vec{r} = \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ 、 $r = |\vec{r}|$ 、 $\vec{e}_r = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ 。

可推得質點 1 的速度 $\vec{v}$ 、加速度 $\vec{a}$ 如下：

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\vec{e}}_r=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \tag{4}$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\ddot{r}\vec{e}_r+\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta+\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta+r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta-r\dot{\theta}^2\vec{e}_r=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta \tag{5}$$

又　$\vec{F}_{12}=F_{12}(r)\vec{e}_r=\mu\vec{a}=\mu\left[(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta\right]$

$$\Rightarrow\begin{cases}F_{12}(r)=\mu\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\\ \mu\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)=0\end{cases} \tag{6}$$

又　$\mu\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(\mu r^2\dot{\theta}\right)=0\Rightarrow\mu r^2\dot{\theta}=$常數，這表示物體的角動量守恆，並設此常數為 L ，即

$$L=\mu r^2\dot{\theta} \tag{7}$$

接著計算系統的力學能 E，並利用(4)、(7)兩式，得

$$E=\frac{1}{2}\mu|\vec{v}|^2+V(|\vec{r}_{12}|)=\frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+V(r)$$

$$=\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\left[\frac{L^2}{2\mu r^2}+V(r)\right]=\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+V_{eff}(r) \tag{8}$$

其中 $V(r)$ 為系統的位能；而

$$V_{eff}(r)=\frac{L^2}{2\mu r^2}+V(r) \tag{9}$$

$V_{eff}(r)$ 稱系統的等效位能。(9)式指出粒子在有心力作用下的運動，可以視為粒子在等效位能場 $V_{eff}(r)=\frac{L^2}{2\mu r^2}+V(r)$ 中，沿徑向 r 的一維運動。

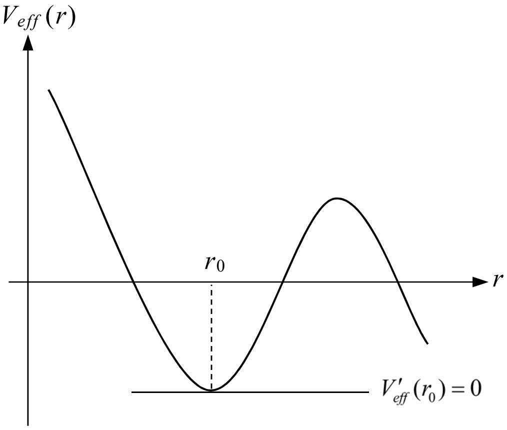

圖 2、等效位能曲線

假設等效位能曲線如圖 2 所示，在 $r=r_0$處有極值，則粒子有穩定軌道的條件：

$V'_{eff}(r_0)=0$ 且 $V''_{eff}(r_0)>0$。因有心力為保守力，有 $F(r)=-\dfrac{dV}{dr}$，由(9)式得

$$V'_{eff}(r_0)=-\frac{L^2}{\mu r_0^3}-F(r_0)=0\Rightarrow F(r_0)=-\frac{L^2}{\mu r_0^3} \tag{10}$$

$$V''_{eff}(r_0)=\frac{3L^2}{\mu r_0^4}-F'(r_0)=-\frac{3F(r_0)}{r_0}-F'(r_0)>0 \tag{11}$$

$$\Rightarrow \qquad F'(r_0)<-\frac{3F(r_0)}{r_0} \tag{12}$$

若有心力可以寫成 $F(r)=-\dfrac{c}{r^n}(c>0)$，『 − 』表示吸引力，代入(12)式，可得

$$\frac{nc}{r_0^{n+1}}<\frac{3c}{r_0\cdot r_0^n}\Rightarrow n<3 \tag{13}$$

(13)式是穩定軌道的條件。

肆、軌道的有界和封閉性

因 $\dot{r}=\dfrac{dr}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{dr}{d\theta}\dfrac{L}{\mu r^2}$ 代入(8)式，得

$$E=\frac{L^2}{2\mu r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{L^2}{2\mu r^2}+V(r) \tag{14}$$

令 $u=\frac{1}{r}\Rightarrow du=-\frac{1}{r^2}dr$，(14)式可改寫成

$$E=\frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu}u^2+V(u^{-1}) \tag{15}$$

定義 $m^*\equiv\frac{L^2}{\mu}$，則有

$$E=\frac{1}{2}m^*\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{2}m^*u^2+V(u^{-1})=\frac{1}{2}m^*\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+V_{eff}(u) \tag{16}$$

其中

$$V_{eff}(u)=\frac{1}{2}m^*u^2+V(u^{-1}) \tag{17}$$

假設在穩定圓軌道上有著 $u_0=1/r_0$，現對 u_0 給一個小擾動 $\rho(\theta)$，寫成

$$u(\theta)=u_0+\rho(\theta)\text{，且 }\frac{du}{d\theta}=\frac{d\rho}{d\theta} \tag{18}$$

將 $V_{eff}(u)$ 對 u_0 做泰勒展開式至微擾 $\rho(\theta)$ 的二次項，並忽略三次以上的高次項：

$$\begin{aligned}V_{eff}(u)&=V_{eff}(u_0)+\rho V_{eff}'(u_0)+\frac{1}{2}\rho^2V_{eff}''(u_0)\\&=V_{eff}(u_0)+\frac{1}{2}\rho^2V_{eff}''(u_0)\end{aligned} \tag{19}$$

上式利用到 $V_{eff}'(u_0)=0$，因當 $u=u_0$ 時，$V_{eff}(u)$ 有極值。

將(18)、(19)兩式代入(16)式，得

$$\frac{1}{2}m^*\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{2}V_{eff}''(u_0)\rho^2=E-V_{eff}(u_0)=E'=\text{常數} \tag{20}$$

(20)式為一簡諧運動方程式，其解可為

$$\rho(\theta)=A\cos(\omega\theta)\ \Rightarrow\ u(\theta)=u_0+A\cos(\omega\theta) \tag{21}$$

有角頻率 ω 為

$$\omega = \sqrt{\frac{V_{eff}''(u_0)}{m^*}} \tag{22}$$

設 $u(\theta)$ 開始在 θ=0，即 $u_{\max} = u_0 + A$；在 $\theta = \theta_A$，到達 $u_{\min} = u_0 - A$。由(21)式知：

從 $u_{\max}$ 到鄰近的 $u_{\min}$ 有著

$$\omega\theta_A = \pi \quad \rightarrow \quad \theta_A = \frac{\pi}{\omega} \tag{23}$$

由(17)式得 $V'_{eff}(u) = m^* u + \frac{d}{du}V(u^{-1}) = m^* u - u^{-2}\frac{dV(r)}{dr} = m^* u + u^{-2}F(r)$

$$V''_{eff}(u_0) = m^* - 2u_0^{-3}F(r_0) - u_0^{-4}F'(r_0) \tag{24}$$

將(10)式中的 $F(r_0) = -\frac{L^2}{\mu r_0^3} = -m^* u_0^3$ 代入(24)式，得

$$\Rightarrow \quad \frac{V''_{eff}(u_0)}{m^*} = 3 + \frac{r_0 F'(r_0)}{F(r_0)} \tag{25}$$

假設有心力 F 可以寫成 $F(r) = -\frac{c}{r^n}(c > 0)$，得

$$\frac{r_0 F'(r_0)}{F(r_0)} = r_0 \frac{ncr_0^{-(n+1)}}{-cr_0^{-n}} = -n \tag{26}$$

$\Rightarrow \quad \frac{V''_{eff}(u_0)}{m^*} = 3 - n$，代入(22)式，得

$$\omega = \sqrt{3-n} \tag{27}$$

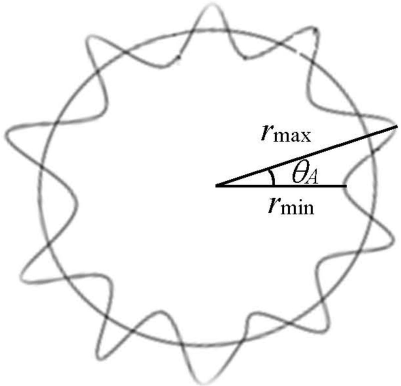

圖 3、軌道的封閉

參考圖 3，在有界的軌道中，若質點的最小距離為 $r_{\min}$ 、最大距離為 $r_{\max}$ ，其軌道封閉的條件可思考如下：質點從 $r_{\min}$ 出發，必須在『有限長』的時間裡，再回到『原出發點』$r_{\min}$ ；質點從 $r_{\min}$ 運行至鄰近的 $r_{\max}$ ，繞行 θ_A。 設在『徑』向 r 方面，共運行 M 次的 $r_{\min} \to r_{\max} \to r_{\min}$ ，回到『原出發點』；而在『角』向方面共繞行 N 次，則

$$2\pi M = N(2\theta_A) \Rightarrow \theta_A = \pi / R \tag{28}$$

其中　$R = N / M$　為一有理數。比對(23)式和(28)式，知

$$\omega = R = \text{有理數} \tag{29}$$

(29)式為軌道封閉的判據。

伍、在有心力 $F(r) = -\dfrac{c}{r^n}(c > 0)$ 的作用下，有哪些 *n* 值，可以使軌道封閉？

一、對 n>0 的情況：

因 $F(r) = -\dfrac{c}{r^n}(c > 0)$，故位能 $V(r) = -\dfrac{c}{n-1}\dfrac{1}{r^{n-1}}$ ，代入(16)式，得

$$E = \frac{1}{2}m^*\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}m^* u^2 - \frac{c}{n-1}u^{n-1} \tag{30}$$

或

$$Eu^{1-n}+\frac{c}{n-1}=\frac{1}{2}\left(m^{*}u^{1-n}\right)\left(\frac{du}{d\theta}\right)^{2}+\frac{1}{2}m^{*}u^{3-n} \tag{31}$$

封閉的軌道是具有週期的，因此(31)式應能化為具週期性的微分方程。

令 $x^{2}=u^{3-n}\Rightarrow x=u^{\frac{3-n}{2}}\Rightarrow du=\frac{2}{3-n}u^{\frac{n-1}{2}}dx$，代入(31)式，得

$$Eu^{1-n}+\frac{c}{n-1}=\frac{1}{2}m^{*}\left(\frac{2}{3-n}\right)^{2}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^{2}+\frac{1}{2}m^{*}x^{2} \tag{32}$$

軌道在有界且位能形式是與距離 $n(>0)$次方成反比下，其力學能必須 $E<0$。在不失一般性的情況下，取 $E\to 0^{-}$，得

$$\frac{c}{n-1}=\frac{1}{2}m^{*}\left(\frac{2}{3-n}\right)^{2}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^{2}+\frac{1}{2}m^{*}x^{2} \tag{33}$$

(33)式為一簡諧運動方程式，得

$$\omega_{0}=\frac{3-n}{2} \tag{34}$$

因 $x=u^{\frac{3-n}{2}}=\left(\frac{1}{r^{(3-n)/2}}\right)$ 且 $r>0$，在位能 $\frac{1}{2}m^{*}x^{2}$ 圖形中，質點僅能在 $x>0$ 的區域內運動，

故其週期 $T=T_{0}/2$，即

$$\omega=2\omega_{0}=3-n \tag{35}$$

比對(27)式和(35)式，有

$$\omega=\sqrt{3-n}=3-n \tag{36}$$

要符合軌道穩定的條件 $n<3$，和軌道封閉的條件 ω 為有理數，其解為『 $n=2$ 』。

二、對 n<0 的情況：

在所學的物理知識中，粒子的力學能 E 是『正』值，且有界、軌道封閉、具週期運動的，像極了彈簧的雙振子振動再加上旋轉的情況。我們將順著這種想法，找出其它可能的 n 值。令 $n=-s(s>0)$，$V(r)=-\frac{c}{n-1}\frac{1}{r^{n-1}}=\frac{c}{s+1}r^{(s+1)}$，代入(9)式，得

$V_{eff}(r)=\frac{L^{2}}{2\mu r^{2}}+\frac{c}{s+1}r^{(s+1)}$，由圖 4 可以看出，知當 r 很小時，

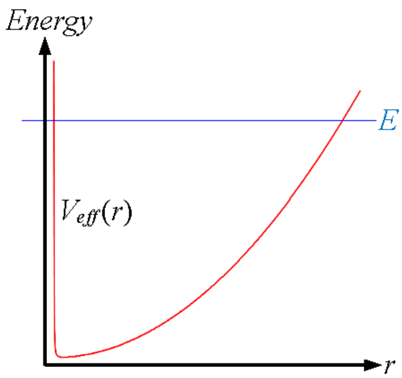

圖 4、力學能 E 較大的等效位能

$V_{eff}(r) \approx \dfrac{L^2}{2\mu r^2} = \dfrac{1}{2} m^* u^2$、而 E 很大，由(16)式，得

$$E \approx \frac{1}{2} m^* \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} = \frac{1}{2} m^* \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{2} m^* u^2 \tag{37}$$

(37)式為一簡諧運動方程式，有

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m^*}{m^*}} = 1 \tag{38}$$

因 u>0，在位能 $\dfrac{1}{2} m^* u^2$ 圖形中，質點僅能在 $u > 0$ 的區域內運動，其週期 $T = T_0 / 2$，即

$$\omega = 2\omega_0 = 2 \tag{39}$$

由(27)式和(39)式，得

$$\omega = \sqrt{3-n} = 2 \Rightarrow n = -1 \tag{40}$$

另一方面，由圖 4 也可以看出，當 r 很大時，$V_{eff}(r) \approx \dfrac{c}{s+1} r^{(s+1)}$，而 E 也很大，由(16)式，得

$$E \approx \frac{1}{2} m^* \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{c}{s+1} r^{(s+1)} \tag{41}$$

因 $u = \dfrac{1}{r} \Rightarrow \dfrac{du}{d\theta} = \dfrac{du}{dr}\dfrac{dr}{dt}\dfrac{dt}{d\theta} = -\dfrac{\dot{r}}{r^2}\dfrac{1}{\dot{\theta}} = -\dfrac{\mu \dot{r}}{L}$，　　(42)

將(42)式代入(41)式，得

$$E \approx \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu}\left(-\frac{\mu\dot{r}}{L}\right)^2 + \frac{c}{s+1}r^{(s+1)} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{c}{s+1}r^{(s+1)} \tag{43}$$

若 s+1=2，(43)式亦為簡諧運動方程式，是具有週期的。因此，s=1，表 $n=-1$，與(40)式結果一致。對於 $n=-1$ 也符合軌道穩定的條件 $n<3$，和軌道封閉的條件 ω 為有理數。綜合上述，推導的結果是，當兩物體所受的力是有心力 $F(r)=-\frac{c}{r^n}(c>0)$ 時，軌道是有界且封閉的，只有當 $n=2$ 和 $n=-1$ 才成立，即力的形式為 $F(r)=-\frac{c}{r^2}(c>0)$ 或 $F(r)=-cr(c>0)$，此為伯特蘭定理。此外，針對太陽系中行星軌道為封閉的橢圓形這件事實，說明了牛頓的萬有引力定律一定是平方反比之力。

陸、有心力與距離立方成反比的軌道是否封閉？

我們想知道若 $F(r)=-\frac{c}{r^3}(c>0)$，質點的運行軌道會怎樣？為了代數上的方便，設力的形式為 $\vec{F}(r)=-\frac{k^2}{\mu r^3}\vec{e}_r$，$k$ 為一常數。由(6)式知

$$\mu(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2) = -\frac{k^2}{\mu r^3} \tag{44}$$

將(7)式，$\dot{\theta}=\frac{L}{\mu r^2}$ 代入(44)式，得

$$\mu\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3} + \frac{k^2}{\mu r^3} = \mu\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3}\left(1-\frac{k^2}{L^2}\right) = 0 \tag{45}$$

令 $r=\frac{1}{u}$，有

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{Lu^2}{\mu} = -\frac{L}{\mu}\frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = -\frac{L}{\mu}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = -\frac{L}{\mu}\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{Lu^2}{\mu} = -\frac{L^2u^2}{\mu^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} \tag{46}$$

將(46)式，代入(45)式，經化簡得

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1-\frac{k^2}{L^2}\right)u = 0 \tag{47}$$

一、若 $L^2 > k^2$，其解是

$$u = A\cos b\theta + B\sin b\theta \tag{48}$$

其中 $b = \sqrt{1-\frac{k^2}{L^2}}$。設初始條件為：在 $t = 0$ 時，$r = r_0$，$u = u_0$，$\theta = \theta_0 = 0$，$\left.\frac{du}{d\theta}\right|_{\theta = 0} = 0$

(表示質點在垂直於徑向量發射)，得

$$u = u_0 \cos b\theta \tag{49}$$

對應的軌道方程為

$$r = r_0 \sec b\theta \tag{50}$$

顯然地，此軌道是不封閉的。

二、若 $L^2 < k^2$，其解是

$$u = Ae^{b'\theta} + Be^{-b'\theta} \tag{51}$$

其中 $b' = \sqrt{\frac{k^2}{L^2}-1}$。設初始條件同上述情形，則得

$$u = u_0 \cosh(b'\theta) \tag{52}$$

對應的軌道方程為

$$r = r_0 \,\mathrm{sech}\, b'\theta \tag{53}$$

其軌道也不封閉。

柒、結論

本文證明了伯特蘭定理，即行星在有心力作用下繞日的軌道，僅在力的形式為 $F(r) = -\frac{c}{r^2}(c > 0)$ 或 $F(r) = -cr(c > 0)$ 時，其軌道才會是封閉的。對於力的形式為 $F(r) = -\frac{c}{r^3}(c > 0)$ 時，經上述的推導，證明了軌道是非封閉的。因此，前言中所說的 71 年大學聯考該選擇題，此命題確實是不成立的，學校的老師在上『萬有引力』這個單元引用此題時，請務必向同學們傳達正確的概念。

參考文獻

Jared Galbraith and Jacob Williams, An Even Simpler “Truly Elementary” Proof of Bertrand’s Theorem, Journal of Undergraduate Reports in Physics 29, 100005 (2019).
S.A. Chin, Am. J. Phys. 83, 320-323 (2015).