一個拉曼奴姜等式的推廣

許閔揚* 劉俊易

彰化縣立彰化藝術高級中學

壹、前言

在 100 年前，印度天才數學家拉曼奴姜發現了數學式$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$，其中$n\geq 0$為一個整數，$[x]$為小於或等於$x$最大整數，他將此發現投稿到印度數學期刊[4]。彰師大數學系陳國傑教授在 2014 年研討會上對於這等式給出一個更簡單的數論證明[3]，隨後李錦鎣教授用微積分來探討並給出許多推廣[1][2]。在計算機的幫助下，我們也得到了一些此等式的推廣。

貳、$\left[\sqrt{\frac{n}{4}}+\sqrt{\frac{n}{4}+1}\right]$ 的探討

定理 1: $\left[\sqrt{\frac{n}{4}}+\sqrt{\frac{n}{4}+1}\right]=\left[\sqrt{n+a}\right],\ 1\leq a<2, n\geq 0$。

證明：當$n\geq 0$，利用平方公式得

$$\sqrt{n+1}\leq\sqrt{\frac{n}{4}}+\sqrt{\frac{n}{4}+1}<\sqrt{n+2}\,,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (1.1)$$

又存在一整數k使得

$$k^2\leq n+1\leq n+a<n+2\leq(k+1)^2\ \text{即}$$

$$k\leq\sqrt{n+1}\leq\sqrt{n+a}<\sqrt{n+2}\leq k+1\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.2)$$

由(1.1)(1.2)，本定理得證。

定理 2: $\left[\sqrt{\frac{n}{4}}+\sqrt{\frac{n}{4}+2}\right]=\left[\sqrt{n+a}\right], 3\leq a<4, n\geq 0$。

證明： 當$n=0$，$\left[\sqrt{\frac{0}{4}}+\sqrt{\frac{0}{4}+2}\right]=\left[\sqrt{0+a}\right]=1$

當$n\geq 1$，利用平方公式得

$$\sqrt{n+3}\leq\sqrt{\frac{n}{4}}+\sqrt{\frac{n}{4}+2}<\sqrt{n+4}\ \ldots\ldots\ldots(2.1)$$

*為本文通訊作者

存在整數k使得

$$k^2 \le n+3 \le n+a < n+4 \le (k+1)^2 \text{ 即}$$

$$k \le \sqrt{n+3} \le \sqrt{n+a} < \sqrt{n+4} \le k+1 \cdots\cdots (2.2)$$

由(2.1)(2.2)，本定理當$n \ge 1$成立，當$n = 0$定理亦成立，得證。

參、$\left[\sqrt{\frac{n}{8}}+\sqrt{\frac{n}{8}+1}\right]$ 的探討

定理3. $\left[\sqrt{\frac{n}{8}}+\sqrt{\frac{n}{8}+1}\right] = \left[\sqrt{\frac{n}{2}+a}\right], \frac{3}{2} \le a < 2, n \ge 0$

證明：當$n = 0$時，$[\sqrt{0}+\sqrt{1}] = [\sqrt{a}\,] = 1$，定理成立。

當$n \ge 1$，利用平方公式，可得

$$\sqrt{\frac{n}{2}+\frac{3}{2}} \le \sqrt{\frac{n}{8}}+\sqrt{\frac{n}{8}+1} < \sqrt{\frac{n}{2}+2}, \cdots\cdots (3.1)$$

若存在一整數k使得

$$\frac{n}{2}+\frac{3}{2} < k < \frac{n}{2}+2 \text{，則}$$

$$n+3 < 2k < n+4 \quad \text{，}$$

這樣的k必不存在。因此 $\frac{n}{2}+\frac{3}{2}$ 與 $\frac{n}{2}+2$ 之間不存在任何整數，因此亦不存在任何整數平方。

因此存在一整數k，使得$k^2 \le \frac{n}{2}+\frac{3}{2} \le \frac{n}{2}+a < \frac{n}{2}+2 \le (k+1)^2$，即

$$k \le \sqrt{\frac{n}{2}+\frac{3}{2}} \le \sqrt{\frac{n}{2}+a} < \sqrt{\frac{n}{2}+2} \le k+1 \cdots\cdots (3.2)$$

由(3.1)(3.2)本定理當$n \ge 1$成立，當$n = 0$定理亦成立，得證。

肆、$\left[\sqrt{\frac{n}{3}}+\sqrt{\frac{n}{3}+1}\right]$的探討

定理 4: $\left[\sqrt{\frac{n}{3}}+\sqrt{\frac{n}{3}+1}\right] = \left[\sqrt{\frac{4n}{3}+a}\right], \frac{4}{3} \le a \le 2, n \ge 0$

證明：當$n = 0$時，$[\sqrt{0}+\sqrt{1}] = [\sqrt{a}\,] = 1$，定理成立。

當$n \ge 1$，利用平方公式，可得

$$\sqrt{\frac{4n}{3}+\frac{4}{3}} \le \sqrt{\frac{n}{3}}+\sqrt{\frac{n}{3}+1} < \sqrt{\frac{4n}{3}+2}\,,\ \cdots\cdots(4.1)$$

對於任一整數 k ， $k^2 \equiv 0 \pmod 4$ 或 $k^2 \equiv 1 \pmod 4$。若存在一整數 k 使得

$$\frac{4n}{3}+\frac{4}{3} < k^2 \le \frac{4n}{3}+2 \text{ ，則}$$

$$4n+4 < 3k^2 \le 4n+6 \text{ ，則}$$

$$3k^2 = 4n+5 \text{ 或 } 3k^2 = 4n+6 \text{ ，得}$$

$$3k^2 \equiv 1 \pmod 4 \text{ 或 } 3k^2 \equiv 2 \pmod 4$$

但 $3k^2 \equiv 0 \pmod 4$ 或 $3k^2 \equiv 3 \pmod 4$，因此在 $\frac{4n}{3}+\frac{4}{3}$ 與 $\frac{4n}{3}+2$ 之間不存在任何整數平方且 $\frac{4n}{3}+2$ 不是任一整數平方。

因此存在一整數 k ，使得 $k^2 \le \frac{4n}{3}+\frac{4}{3} \le \frac{4n}{3}+a \le \frac{4n}{3}+2 < (k+1)^2$ ，即

$$k \le \sqrt{\frac{4n}{3}+\frac{4}{3}} \le \sqrt{\frac{4n}{3}+a} \le \sqrt{\frac{4n}{3}+2} < k+1 \cdots\cdots(4.2)$$

由(4.1)(4.2)，本定理當$n \ge 1$成立，當$n = 0$定理亦成立，得證。

伍、結語

這個拉曼奴姜等式敘述簡單，是一個只要學過根號與高斯符號就能理解的數學式，它的證明不但容易而且極富趣味性。在計算機的幫助下，應該可以找到更多等式。讀者對這主題若想要有更深刻的了解，可參考李錦鎣在數學傳播的兩篇文章[1][2]。

參考文獻

李錦鎣。等式 $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right]=\left[\sqrt{9n+8}\right]$ 成立嗎?。**數學傳播季刊, 39**(3), 42-46, 2015。

李錦鎣。等式 $\left[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\right]=\left[\sqrt[3]{8n+4}\right]$ 不是一個孤立的等式。**數學傳播季刊, 40**(1), 72-80, 2016。

Kuo-Jye Chen：*On a problem proposed by Ramanujan*，彰化師範大學自然科學 研討會會議手冊, 2014。http://science.ncue.edu.tw/journal/article/1-2-7.pdf

S. Ramanujan, *Question 723*, J. Indian Math. Soc., Volume 10 (1918) 357-358.