十分逼近法的誤打誤撞

雷偉明

桃園市立平鎮國民中學

壹、前言

國中二年級(八年級)教科書有一單元為十分逼近法。針對無法完全開方的正整數，先將其根號值鎖定在兩個連續整數之間，然後再切割十等分，利用平方值的夾擠原理獲得近似值。例如翰林版習作題：

以十分逼近法，將 $\sqrt{15}$ 的近似值以四捨五入法取到小數點後第一位。

(1) 已知 $1^2=1$，$2^2=4$，$3^2=9$，$4^2=16$，$5^2=25$，$6^2=36$，

所以_____< $\sqrt{15}$ <_____。(兩連續整數)

(2) 已知 $(3.1)^2=9.61$，$(3.2)^2=10.24$，$(3.3)^2=10.89$，$(3.4)^2=11.56$，$(3.5)^2=12.25$，$(3.6)^2=12.96$，$(3.7)^2=13.69$，$(3.8)^2=14.44$，$(3.9)^2=15.21$，

所以_____< $\sqrt{15}$ <_____。(小數點後第一位)

(3) 已知 $(3.85)^2=14.8225$

所以 $\sqrt{15}$ _____3.85(填>、=或<)

(4) $\sqrt{15}$ 的近似值為_____（以四捨五入法取到小數點後第一位）

以上為階段引導模式題，此題目轉化為試卷的選擇題或填充題時，通常以下列方式呈現：

已知 $(3.1)^2=9.61$，$(3.2)^2=10.24$，$(3.3)^2=10.89$，$(3.4)^2=11.56$，$(3.5)^2=12.25$，$(3.6)^2=12.96$，$(3.7)^2=13.69$，$(3.8)^2=14.44$，$(3.9)^2=15.21$，$(3.75)^2=14.0625$，$(3.85)^2=14.8225$，$(3.95)^2=15.6025$

試求 $\sqrt{15}$ 的近似值（以四捨五入法取到小數點後第一位）。

許多學生在應試上題時，會認為問題是要取到小數點後第一位，於是只比較小數點後第一位的平方值，其中 3.9 的平方最接近 15，便作答 3.9。就課程教材教法而言，應先確認小數點後第一位為何(此題為 3.8，即介於 3.8 與 3.9 之間)，再考慮小數點後第二位(大於 3.85)，然後再四捨五入作答，因此學生應試的邏輯有頗大的瑕疵。可，此法每試必中。是巧合？抑或背後有數學原理加持?本文目的便是想追個水落石出。

貳、證明

定理：若正整數 m 為非完全平方數，且最接近的完全平方數為 k^2 (其中 k 為正整數)，則 $\sqrt{m}$ 最接近的整數為 k 。

證明：因為正整數 m 為非完全平方數，故存在正整數 n ，使得 $n^2<m<(n+1)^2$ ，

因為 n^2 與 $(n+1)^2$ 的平均為 $n^2+n+\frac{1}{2}$ (非整數)，

所以 $n^2+n+\frac{1}{2}$ 之前的整數 $n^2+1, n^2+2, \cdots, n^2+n$ 較接近 n^2 ，

而 $n^2+n+\frac{1}{2}$ 之後的整數 $n^2+n+1, n^2+n+2, \cdots, n^2+2n$ 較接近 $(n+1)^2$ ，

因此，若 m 較接近 n^2 ，則 $n^2<m\leq n^2+n<n^2+n+\frac{1}{4}=(n+\frac{1}{2})^2$ ，

$\therefore\ n<\sqrt{m}<n+\frac{1}{2}$ ，故 $\sqrt{m}$ 最接近的整數為 n ，

同理，若 m 較接近 $(n+1)^2$ ，則 $(n+\frac{1}{2})^2<m<(n+1)^2$ ，

$\therefore\ n+\frac{1}{2}<\sqrt{m}<n+1$ ，故 $\sqrt{m}$ 最接近的整數為 $n+1$ ，

命題得證。

換言之，因為 $\frac{n^2+(n+1)^2}{2}=n^2+n+\frac{1}{2}$ ， $\left[\frac{n+(n+1)}{2}\right]^2=n^2+n+\frac{1}{4}$ ，

故 $\frac{n^2+(n+1)^2}{2}$ 與 $\left[\frac{n+(n+1)}{2}\right]^2$ 之間無任何整數存在，

因此介於 n^2 與 $\frac{n^2+(n+1)^2}{2}$ 之間的整數 m 必介於 n^2 與 $\left[\frac{n+(n+1)}{2}\right]^2$ 之間，

$\therefore\ \ n<\sqrt{m}<\frac{n+(n+1)}{2}$ ，即 $\sqrt{m}\doteqdot n$ (取到整數位之近似值)，

因此介於 $\frac{n^2+(n+1)^2}{2}$ 與 $(n+1)^2$ 之間的整數 m 必介於 $\left[\frac{n+(n+1)}{2}\right]^2$ 與 $(n+1)^2$ 之間，

$\therefore\ \frac{n+(n+1)}{2}<\sqrt{m}<n+1$ ，即 $\sqrt{m}\doteqdot n+1$(取到整數位之近似值)。

接下來的問題是：求近似值時，以四捨五入法求到小數點後任意位，此法則仍適用嗎？答案是肯定的，證明如下：

若 $[n\times10^{-k}]^2<m<[(n+1)\times10^{-k}]^2$ ，其中 n 、 k 、 m 為正整數，

因為 $\dfrac{[n\times10^{-k}]^2+[(n+1)\times10^{-k}]^2}{2}=10^{-2k}\cdot\dfrac{n^2+(n+1)^2}{2}$ ，

$\left[\dfrac{n\times10^{-k}+(n+1)\times10^{-k}}{2}\right]^2=10^{-2k}\cdot\left[\dfrac{n+(n+1)}{2}\right]^2$ ，

且由先前之證明知 $\dfrac{n^2+(n+1)^2}{2}$ 與 $\left[\dfrac{n+(n+1)}{2}\right]^2$ 有相等之整數部分 n^2+n ，且二者相差 $\dfrac{1}{4}$ ，

故 $\dfrac{[n\times10^{-k}]^2+[(n+1)\times10^{-k}]^2}{2}$ 與 $\left[\dfrac{n\times10^{-k}+(n+1)\times10^{-k}}{2}\right]^2$ 有相等之整數部分 $\left[10^{-2k}(n^2+n)\right]$(高斯符號)，且二者相差 $10^{-2k}\cdot\dfrac{1}{4}$ ，其餘不贅述。

例：若 $100.3^2<m<100.4^2$ ，其中 m 為正整數，

因 $\dfrac{100.3^2+100.4^2}{2}=\dfrac{1}{100}\cdot\dfrac{1003^2+1004^2}{2}$ ， $(\dfrac{100.3+100.4}{2})^2=\dfrac{1}{100}\cdot(\dfrac{1003+1004}{2})^2$ ，

又 $\dfrac{1003^2+1004^2}{2}$ 與 $(\dfrac{1003+1004}{2})^2$ 有相等之整數部分，且二者相差 $\dfrac{1}{4}$ ，

因此 $\dfrac{100.3^2+100.4^2}{2}$ 與 $(\dfrac{100.3+100.4}{2})^2$ 有相等之整數部分 $\left[\dfrac{1}{100}\cdot\dfrac{1003^2+1004^2}{2}\right]$(高斯符號)，且二者相差 $\dfrac{1}{400}$ 。故當正整數 m 較接近 100.3^2 ，而非 100.4^2 時， $\sqrt{m}\fallingdotseq$ 100.3(近似值取到小數點後第一位)；反之， $\sqrt{m}\fallingdotseq100.4$。

倘若將上述開方對象 m 由正整數改為<u>正數</u>，定理仍適用嗎?答案是不一定。若正數 m 介於 n^2 與 $(n+1)^2$ 之間，且較接近 $(n+1)^2$，則 $m>n^2+n+\dfrac{1}{2}>n^2+n+\dfrac{1}{4}=(n+\dfrac{1}{2})^2$，故 $\sqrt{m}>n+\dfrac{1}{2}$，即 $\sqrt{m}$ 最接近的整數為 $n+1$。若正數 m 介於 n^2 與 $(n+1)^2$ 之間，且較接近 n^2，則 $m<n^2+n+\dfrac{1}{2}$ ，但 $n^2+n+\dfrac{1}{2}>n^2+n+\dfrac{1}{4}$ ，即 m 不一定小於 $n^2+n+\dfrac{1}{4}$ ，故無法判定 $\sqrt{m}$ 最接近的整數為 n 。因此， m 只要找介於 $n^2+n+\dfrac{1}{4}$ 與 $n^2+n+\dfrac{1}{2}$ 之間的數，便可成為反例。例如當 n=3， $n^2+n+\dfrac{1}{4}$=12.25， $n^2+n+\dfrac{1}{2}$=12.5，取 m=12.3201，則 m 最接近的完全平方數為 3^2，但 $\sqrt{m}$=3.51，$\sqrt{m}$ 最接近的整數為 4，而非 3。前述之適用與不適用之情形，同理可類推在求近似值時，以四捨五入法求到小數點後任意位。

參、結語

學生的誤打誤撞背後確實有學理根據支撐且百發百中。不過站在教育的角度，應倡導能理解的邏輯才是正道，像開根號對象為非正整數或三次方根便不完全適用此規律，以上與讀者共享共勉之。

肆、後記

本文撰寫完畢並繕打完成後，網搜相關文章與投稿出處，發現 105 年 7 月出版的科學教育月刊內文有一篇楊惠后所著——不一樣的十分逼近的取法就是錯嗎?其論述出發點亦是本人此次投稿之出發點。然，楊老師證明了一部分，另一部分是針對 100 內的所有正整數進行實驗來完備。本文將整個證明完備，雖不是什麼大學問，但相信許多人對此議題頗感興趣。之所以教書二十多年來都沒有去證明，乃因跟其他數學老師一樣，認為學生的誤打誤撞只是運氣好，並不認為有絕對的論理支撐。如今水落石出，往後就不會再有不明不白的疙瘩在了。

參考文獻

國中數學第 3 冊習作。P21，翰林出版社(2020)。