以回溯逆向差分運算法
尋找數列的多項式函數

李輝濱

嘉義市私立輔仁高級中學退休教師

壹、前言

尋找通過實驗完成的多個觀測數據的一道經驗曲線多項式函數，並歸納出所有數據間的規律性以預測未來形勢是實證科學與理論工作者的一項研究方針。歷史上探討這類數值理論來解決多項式函數的插值問題者首推牛頓(Isaac Newton)與拉格朗日(Joseph-Louis Lagrange)兩人，他們各自對插值多項式函數作分析、比對，再應用因式定理與餘式定理的特質內涵型態作連結整合，分別得證出獨有的插值公式，其詳情請查閱主文 **引理** 3. 的一單位等單位間距牛頓插值公式法。

本文要提出逆向思考的另類不同分析法；以溯源等單位間距差分法探尋數列的多項式函數，利用二項式的等單位間距差分運算過程逆向來回推至數列一般項的多項式函數。數列研究的一個重點就是要探討分析出它的一般通項的多項式函數。本標題探討的目標著重於一元多項式函數。插值多項式的相關問題可參考蔡聰明 (2010，2016)、陳建燁 (2017) 及 Brutman (1997)。

貳、本文

對於函數 $y_x = f(x)$，若指定等單位間距節點 x ： $x = 1 , 2 , 3 , 4 , \cdots, n$ ，(n 為正整數)，定義 $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ ，則稱 $\Delta f(x)$ 為函數 $f(x)$ 在每個單位區間上的增量 $y_{x+1} - y_x$ 形成 $y_x = f(x)$ 的一階差分函數，它是新的函數。

一階差分的差分為二階差分，二階差分的差分為三階差分，其餘類推。以符號 $\Delta^n f(x)$ 表示 $f(x)$ 的 n 階差分函數，是經歷實作 n 階差分運算後的新函數。

基本二項式(basis binomial)在差分運算的數值分析中扮演著舉足輕重的地位，在逆向推演數列一般項的多項式函數時常要應用到二項式展開式的部份相關式，以逐次連結成較高一次的多項式函數，最後再演繹成完整的最高次數多項式函數，而在鋪陳佈局推演時必須依照標準操作演算程序 SOP 始能在印證中化繁為簡，釐清並鎖定操作方向，逐步順利地證明出適配(best fitting)的多項式函數來。

接下來敘述的文章內所呈現的演繹運算流程中將會頻繁的應用到下列 3 個基本性質；

一、數學基本性質；

引理 1. (二項式定理)：$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$　(n 為正整數)

即　$(x+y)^n = x^n + C_1^n x^{n-1}y + C_2^n x^{n-2}y^2 + \cdots + C_{n-1}^n xy^{n-1} + y^n$　(L1)

此處，表示式中的符號 $\binom{n}{k}=C_k^n$ 為二項式係數，其數值恰等於 $\dfrac{n\,!}{k\,!\,(n-k)!}$ ，

其中　$n\,! = 1\times 2\times 3\times\cdots\times n$。 組合學上，符號 C_k^n 表示從 n 件不同物件中任意選取 k 項物件的組合數。

引理 2. 若 $f(x)$ 是一元 n 次多項式函數，則一階差分 $\Delta f(x)=\sum_{k=1}^{n}C_k^n\cdot x^{n-k}$ 的充要條件為 $f(x)=x^n+c$ ，其中 $c\in R$。

[證明]：(充分條件)：對 $f(x)$ 作第一階差分實際運算，得下列過程；

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)=\Delta(x^n+c) \quad\Rightarrow$$

$$\Delta f(x)=[(x+1)^n+c]-[x^n+c]=(x+1)^n-x^n=\sum_{k=1}^{n}C_k^n\cdot x^{n-k} \qquad \text{(L2)}$$

(必要條件)：令 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ ，則

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)=C_1^n a_{n.}x^{n-1}+(C_2^n a_n + C_1^{n-1}a_{n-1})x^{n-2}$$
$$+(C_3^n a_n + C_2^{n-1}a_{n-1}+C_1^{n-2}a_{n-2})x^{n-3}+\cdots+(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1)$$

又　$\Delta f(x) = C_1^n x^{n-1}+C_2^n x^{n-2}+C_3^n x^{n-3}+\cdots+C_n^n$ 。

比較最高次項 x^{n-1} 的係數，有 $C_1^n a_{n.}=C_1^n$ ，可得 $a_{n.}=1$；再比較次高次項 x^{n-2} 的係數 $C_2^n a_n + C_1^{n-1}a_{n-1}=C_2^n$ ，可得 $a_{n-1.}=0$ ；依次再比較後續各項係數，得知 $a_{n-1.}=a_{n-2}=a_{n-3}=\cdots=a_1=0$

因此， $f(x)=x^n+a_0$。 再令 $a_{0.}=c$， 得 $f(x)=x^n+c$。

註明：在引理 2.中，(L2)式表示對函數 x^n+c 作一次差分運算後所獲得的 $n-1$ 次數新結構式。而必要條件表示對此 $\Delta f(x)$ 作一次反差分運算後所獲得的原始 n 次式結構式。

引理 3. (牛頓插值法) 每一個一元 n 次多項式函數 $f(x)$ 都可表成

$$f(x) = f(1)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,!}\left(\Delta^k f(1)\right)g_k(x) \qquad \text{(L3)}$$

其中 $g_k(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-k)$ 為 k 次多項式函數。

[證明]：利用多項式的除法定理或由餘式定理，可設

$$f(x)=f(1)+(x-1)\cdot q_1(x) \text{ ，而 } q_1(x)=q_1(2)+(x-2)\cdot q_2(x) \text{ ，}$$

由此可推得 $f(x)=f(1)+(x-1)\cdot q_1(x)=f(1)+q_1(2)(x-1)+q_2(x)(x-1)(x-2)$ ，依此下去，我們可令

$$f(x) = f(1) + a_1(x-1) + a_2(x-1)(x-2) + \cdots + a_n(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\text{，}$$

再代入比較係數即可導出 $a_{k.} = \dfrac{1}{k\,!}\left(\Delta^k f(1)\right)$，$k = 1,2,3,\ \cdots\ ,n$。

二、以回溯逆向差分運算法尋找數列一般項的多項式函數

探尋有限或無窮數列的一般項多項式函數可先對數列的已知數值依序作差分實際運算並按序排列出每一階差的結果，然後再逐步逆向追蹤等單位間距差分運算的各階差操作過程而回證出此數列一般項的多項式函數，整個推演流程必須依循標準操作演算程序 SOP 始能達成任務。以下就是研究的策略與方法；

A. 標準操作演算程序 SOP：就給定數列求證其一般項多項式時的程序步驟為；

A1. 差分運算實作流程：首先計算製作出一個差分表，操作如下；

[1] 對一給定數列依序排列出已知的各項數值形成第 1 列，然後對此第 1 列依序作第一階差分實際運算並按序排列出第一階差分函數的數值結果而形成第 2 列。再由引理 2. 的差分運算性質知；每作一次差分運算，多項式的次數即降低 1 次。

[2] 對第 2 列依序作第二階差分實際運算並按序排列出第二階差分函數的數值結果以形成第 3 列。

[3] 持續上述的相同操作，依序對第 3 列、第 4 列、第 5 列、⋯等各列作各階差分實際運算，並按序排列出各下一階差分函數的數值結果以形成元素有秩序逐一縮減的各下一階新數列。直到最後的第 n 階差分函數的數值出現完全相等的常數為止，此時第 n 階差分函數為常數函數，即零次函數，當下就終止差分運算，而製作完成出一個差分表。這差分表是尋找數列一般多項式函數的最大利器。

若給定數列是 n 個數值的有限數列，則第 n 階差分函數的數值個數必剩下唯一的一個數。若給定數列是無窮數列，則最後呈現的必是常數無窮數列。

根據上述的操作過程，實際運算製作出下面這個差分實作表：

給定一元多項式函數 $y_x = f(x)$，$x = 1, 2, 3, 4, \cdots, n$，($n$ 為正整數)，依順序排列出函數 $y_x = f(x)$ 及各階差分 $\Delta^n f(x)$ 的數列數值差分表，示意如下；

$f(x)$：$f(1)$　　$f(2)$　　$f(3)$　　$f(4)$　　$f(5)$　　$\cdots$　　$f(n)$

$\Delta f(x)$：$f(2)-f(1)$　　$f(3)-f(2)$　　$f(4)-f(3)$　　$f(5)-f(4)$　$\cdots$　$f(n)-f(n-1)$

$\Delta^2 f(x)$：$f(3)-2f(2)+f(1)$　　$f(4)-2f(3)+f(2)$　　$f(5)-2f(4)+f(3)$　　$\cdots$

$\Delta^3 f(x)$：　$f(4)-3f(3)+3f(2)-f(1)$　　$f(5)-3f(4)+3f(3)-f(2)$　　$\cdots$

$\Delta^4 f(x)$：　　$f(5)-4f(4)+6f(3)-4f(2)+f(1)$　　$\cdots$

$\Delta^5 f(x)$：　　　$f(6)-5f(5)+10f(4)-10f(3)+5f(2)-f(1)$　　$\cdots$

$\vdots$　　　$\vdots$　　　$\vdots$

$\Delta^{n-2} f(x)$：　$\sum_{k=0}^{n-2} C_k^{n-2}\cdot(-1)^k\cdot f(n-1-k)=\Delta^{n-2} f(1)$　　$\Delta^{n-2} f(2)$　　$\cdots$

$\Delta^{n-1} f(x)$：　　$\sum_{k=0}^{n-1} C_k^{n-1}\cdot(-1)^k\cdot f(n-k)=\Delta^{n-1} f(1)=b_0$　　b_0　　$\cdots$

這差分表內每一個位置運算式，如；$f(5)-2f(4)+f(3)$ 等都代表 1 個數值。

再請看以下實際數據操作差分表的例子：

x：	1		2		3		4		5		6		7		$\cdots$	
$f(x)$：	7		10		16		28		49		82		130		$\cdots$	
$\Delta f(x)$：		3		6		12		21		33		48		$\cdots$		
$\Delta^2 f(x)$：			3		6		9		12		15		$\cdots$			
$\Delta^3 f(x)$：				3		3		3		3		$\cdots$				

由引理 3.牛頓差值法得知此差分表的多項式函數為 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+4x+4$，是個一元三次 4 項數的多項式函數。

A2. 回溯逆向推理差分運算流程：　由實做完成的差分運算表回溯起；

[4] 差分表最後一列是單一數 b_0 或是常數 b_0 數列，取定這列第 1 個數 b_0，而此 $b_0=\Delta^{n-1} f(1)=\Delta^{n-1} f(x)$，並回溯其前一列所屬的多項式函數必為一次式，思考演算流程如下；由 $b_0 = b_0+b_0(x-x)+b_1-b_1 = [\,b_0(x+1)+b_1\,]-(b_0x+b_1) = \Delta^{n-2} f(x+1)-\Delta^{n-2} f(x) = \Delta[\,\Delta^{n-2} f(x)\,] = \Delta[\,b_0x+b_1\,]$，應用引理 2.必要條件的一階差分 n 次式結構式而得出回推的一次式為；$\Delta^{n-2} f(x) = b_0\,x+b_1 = \Delta^{n-1} f(1)]\cdot x+b_1$，此時的回溯常數 b_1 恰為 $b_1=[\,\Delta^{n-2} f(1)\,]-b_0$，代入 b_1 值，得明確一次多項式函數為；$\Delta^{n-2} f(x) = b_0\cdot x+b_1 = b_0\cdot x+\{[\,\Delta^{n-2} f(1)\,]-b_0\}$　　(1)

[5] 完成一次式後再往前回溯一列到 $\Delta^{n-3} f(x)$ 函數式，其必為二次式；現在要回推出此二次式，將 (1)式等號右側的函數內容配型成原來的二次式結構式　$\Rightarrow$

$\Delta^{n-2} f(x) = b_0\cdot x+b_1 = \frac{1}{2}b_0\cdot(2x+1)+b_1-\frac{1}{2}b_0 = \frac{1}{2}b_0\cdot(2x+1+x^2-x^2)+[\,b_1-\frac{1}{2}b_0\,][1+(x-x)]+b_2-b_2 = \{\,\frac{1}{2}b_0\cdot(x+1)^2+[\,b_1-\frac{1}{2}b_0\,](x+1)+b_2\,\}-\{\,\frac{1}{2}b_0\cdot x^2+[\,b_1-\frac{1}{2}b_0\,]\cdot x+b_2\,\}=[\,\Delta^{n-3} f(x+1)]-[\,\Delta^{n-3} f(x)\,] = \Delta[\,\Delta^{n-3} f(x)\,]$

$= \ \Delta\{\ \frac{1}{2}b_0 \cdot x^2 + [b_1 - \frac{1}{2}b_0] \cdot x + b_2\ \}$ ， $\Rightarrow$ 因而回推得二次式為；

$\Delta^{n-3} f(x) \ = \ \frac{1}{2}b_0 \cdot x^2 + [b_1 - \frac{1}{2}b_0] \cdot x + b_2 \ = \frac{1}{2}b_0 \cdot x^2 + \{[\Delta^{n-2} f(1)] - \frac{3}{2}b_0\} \cdot x + b_2$

，而回溯常數 b_2 恰為 $b_2 = [\Delta^{n-3} f(1)] - b_1 = [\Delta^{n-3} f(1)] - \{[\Delta^{n-2} f(1)] - [\Delta^{n-1} f(1)]\}$

$=[\Delta^{n-3} f(1)] - [\Delta^{n-2} f(1)] + b_0$ ，代入常數 b_2 的值可得明確的二次多項式函數為；

$$\Delta^{n-3} f(x) = \ \frac{1}{2}b_0 \cdot x^2 + \{[\Delta^{n-2} f(1)] - \frac{3}{2}b_0\} \cdot x + \{[\Delta^{n-3} f(1)] - b_1\}$$

$$= \ \frac{1}{2}b_0 \cdot x^2 + \{[\Delta^{n-2} f(1)] - \frac{3}{2}b_0\} \cdot x + \{\Delta^{n-3}[f(1)] - [\Delta^{n-2} f(1)] + b_0\} \qquad (2)$$

[6] 持續上述的同樣操作運算模式，而每次都須應用到引理 2.的一階差分 n 次結構式的充分條件與回溯配型成較高一次的必要條件並有回溯常數 b_j 的取值， $b_j = [\Delta^{n-j-1} f(1)] - b_{j-1}$ （$1 \le j \le n$） 。直到最前面第一列的 $f(x)$ 多項函數式被求證出來為止，即結束操作推演，此時 $f(x)$ 即為所求的多項式函數。

B. 回溯追蹤推演理論的驗證：

B1. 一般多項式函數的差分運算型與組合型表示式：

由牛頓差值法，可得差值多項式函數 $f(x)$ 的差分組合型表示式：

$$f(x) \ = f(1) + C_1^{x-1}\,\Delta f(1) + C_2^{x-1}\,\Delta^2 f(1) + C_3^{x-1}\,\Delta^3 f(1) + \cdots + C_{n-1}^{x-1}\,\Delta^{n-1} f(1) \qquad (3)$$

$$\Rightarrow f(x+1) = f(1) + C_1^{x}\,\Delta f(1) + C_2^{x}\,\Delta^2 f(1) + C_3^{x}\,\Delta^3 f(1) + \cdots + C_{n-1}^{x}\,\Delta^{n-1} f(1) \qquad (4)$$

B2. 對一般多項式函數(3)作差分運算：

[1] 對組合式作差分運算並應用組合學恆等式； $\Delta C_m^x \ = \ C_{m-1}^x$ (L4)

$$\Delta C_m^x \ = \ \Delta\left(\ \frac{x\ !}{m\ !(x-m)!}\ \right) = \frac{(x+1)!}{(m)!(x+1-m)!} - \frac{(x)!}{(m)!(x-m)!} = \ C_m^{x+1} - C_m^x \ = \ C_{m-1}^x$$

[2] 應用 (L4)式對多項式函數 (3)作連續差分運算，流程如下：

$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$

$= (\ C_1^x - C_1^{x-1}\ )\,\Delta f(1) + (\ C_2^x - C_2^{x-1}\ )\,\Delta^2 f(1) + (\ C_3^x - C_3^{x-1}\ )\,\Delta^3 f(1) + \cdots + (\ C_{n-2}^x - C_{n-2}^{x-1}\ )$
$\Delta^{n-2} f(1) + (\ C_{n-1}^x - C_{n-1}^{x-1}\ )\,\Delta^{n-1} f(1)$

$= C_0^{x-1}\,\Delta f(1) + C_1^{x-1}\,\Delta^2 f(1) + C_2^{x-1}\,\Delta^3 f(1) + \ \cdots \ + C_{n-2}^{x-1}\,\Delta^{n-1} f(1)$

$\Delta^2 f(x) = \ \Delta f(x+1) - \Delta f(x)$

$= C_0^{x-1}\,\Delta^2 f(1) \ + C_1^{x-1}\,\Delta^3 f(1) + C_2^{x-1}\,\Delta^4 f(1) + \ \cdots \ + C_{n-3}^{x-1}\,\Delta^{n-1} f(1)$

$\vdots$

一般而言，可推得

$$\Delta^{n-2} f(x) = C_0^{x-1} \Delta^{n-2} f(1) + C_1^{x-1} \Delta^{n-1} f(1)$$

$$\Delta^{n-1} f(x) = C_0^{x-1} \Delta^{n-1} f(1) = \Delta^{n-1} f(1) = b_0$$

B3. 逆向差分運算每升高一次數的回溯常數 b_j 推理步驟：

[4] 承續上述的關係式，我們可由

$$\Delta^{n-2} f(x) = C_0^{x-1} \Delta^{n-2} f(1) + C_1^{x-1} \Delta^{n-1} f(1) = \Delta^{n-2} f(1) + (\Delta^{n-1} f(1))(x-1)$$

$$= b_0 x + (\Delta^{n-2} f(1) - b_0) = b_0 x + b_1$$

，得出函數 $\Delta^{n-2} f(x)$ 的常數項即第 1 個回溯常數 b_1，而 $b_1 = [\Delta^{n-2} f(1)] - b_0$，

進一步，再由

$$\Delta^{n-3} f(x) = C_0^{x-1} \Delta^{n-3} f(1) + C_1^{x-1} \Delta^{n-2} f(1) + C_2^{x-1} \Delta^{n-1} f(1)$$

$$= \Delta^{n-3} f(1) + (\Delta^{n-2} f(1))(x-1) + \frac{1}{2}(\Delta^{n-1} f(1))(x-1)(x-2) \quad \text{(展開並整理)}$$

$$= \frac{1}{2}(\Delta^{n-1} f(1))x^2 + \left(\Delta^{n-2} f(1)] - \frac{3}{2}(\Delta^{n-1} f(1))\right)\cdot x + \left(\Delta^{n-3} f(1) - \Delta^{n-2} f(1) + \right.$$

$$\left.\Delta^{n-1} f(1)\right) = \frac{1}{2} b_0 \cdot x^2 + \left(\Delta^{n-2} f(1) - \frac{3}{2} b_0\right)\cdot x + \left(\Delta^{n-3} f(1) - \Delta^{n-2} f(1) + b_0\right)$$

，得出第 2 個回溯常數 b_2，而 $b_2 = \Delta^{n-3} f(1) - \Delta^{n-2} f(1) + b_0 = \Delta^{n-3} f(1) - b_1$

[5] 自上述的說明過程中可看出任一函數 $\Delta^i f(x)$ 的常數項即為第 $(n-1)-i$ 個回溯常數 b_{n-1-i}（$i = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots, n-1$），並可得到一般回溯常數的遞迴式：

$$b_j = (\Delta^{n-j-1} f(1)) - b_{j-1} \quad (1 \le j \le n) \quad 。$$

[6] 持續上述推演步驟，直到得出 $f(x)$ 的常數項，即第 $n-1$ 個回溯常數 b_{n-1} 出現為止，並求出 (3)式 $f(x)$ 的常數項值 $b_{n-1} = f(1) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i \Delta^i f(1)$。

再求出 (3)式 $f(x)$ 的一階差分函數 $\Delta f(x)$ 的常數項 $b_{n-2} = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}\Delta^i f(1)$ 。

因此，我們可以推得以下的關係：得出 ；　$b_{n-1} = f(1) - b_{n-2}$ 。

綜合以上的敘述推理流程，我們證明了逆向差分運算配型結構式與回溯常數的遞回關係式 $b_j = (\Delta^{n-j-1} f(1)) - b_{j-1}$ $(1 \le j \le n)$ 等理論以及實際演算的操作法。

C. 回溯追蹤逆向推演理論的範例

[範例 1]： 一元 3 次數多項式函數 $f(x)= ax^3+bx^2+cx+d$ 的差分表如下；

x：	1	2	3	4
$f(x)$：	$a+b+c+d$	$8a+4b+2c+d$	$27a+9b+3c+d$	$64a+16b+4c+d$
$\Delta f(x)$：	$\Delta f(1)=7a+3b+c$	$19a+5b+c$	$37a+7b+c$	$\cdots$
$\Delta^2 f(x)$：	$\Delta^2 f(1)=12a+2b$	$18a+2b$	$24a+2b$	$\cdots$
$\Delta^3 f(x)$：	$b_0=\Delta^3 f(1)=6a$	$6a$	$6a$	

(1) 依據前述 SOP 逆向推演標準操作模式先取定常數數列值 $\Delta^3 f(x)=b_0=6a$

(2) $\Delta^2 f(x)=6a\,x+[\Delta^2 f(1)]-b_0=6a\,x+6a+2b=3a\,(2x+1)+(3a+2b)$

(3) $\Delta f(x)=3a\,x^2+(3a+2b)\,x+[\Delta f(1)]-[\Delta^2 f(1)]+b_0$

$=3a\,x^2+(3a+2b)\,x+(a+b+c)=a\,(3x^2+3x+1)+b\,(2x+1)+c$

(4) $f(x)=a\,x^3+b\,x^2+c\,x+f(1)-[\Delta f(1)]+[\Delta^2 f(1)]-b_0$

$=a\,x^3+b\,x^2+c\,x+(a+b+c+d)-(a+b+c)=a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d$

[範例 2]： 一元 4 次數多項式函數 $f(x)=x^4-x^3+x^2-2x-2$ 的差分表如下；

x：	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$f(x)$：	-3	6	55	198	513	1102	$\cdots$
$\Delta f(x)$：	9	49	143	315	589	$\cdots$	
$\Delta^2 f(x)$：	40	94	172	274	$\cdots$		
$\Delta^3 f(x)$：	54	78	102	$\cdots$			
$\Delta^4 f(x)$：	24	24	$\cdots$				

(1) 依據 SOP 的逆向推演標準操作模式先取定常數數列值 $\Delta^4 f(x)=24$

(2) $\Delta^3 f(x)=24x+(54-24)=24x+30=12(2x+1)+18$

(3) $\Delta^2 f(x)=12x^2+18x+[40-54+24]=12x^2+18x+10$

$=4(3x^2+3x+1)+3(2x+1)+3$

(4) $\Delta f(x)=4x^3+3x^2+3x+[9-40+54-24]=4x^3+3x^2+3x-1$

$=(4x^3+6x^2+4x+1)-(3x^2+3x+1)+(2x+1)-2$

(5) $f(x)=x^4-x^3+x^2-2x+\{(-3)-[9-40+54-24]\}=x^4-x^3+x^2-2x-2$

從範例中可見到在作逆向推演多項式函數公式的流程時，僅須要採取 3 種操作運算法；[第 1 法]. 先排列出已給定數列的差分表。[第 2 法]. 依順序作一階一階的反差分運算以配型升高 1 個次數。配型的要領就是要依順序配成如：$(2x+1)$、$(3x^2+3x+1)$、$(4x^3+6x^2+4x+1)$、⋯等等型態以升高 1 個次數成為 x^2、x^3、x^4、⋯等的操作。[第 3 法]. 升高 1 個次數後要再加上升階的對應回溯常數。如此透過配型逐次升高次數的層層迭代操作運算必可完整推演出適配的多項式函數。

參、結論

[1] 以配型升高 1 個次數操作法是根據 $(x+1)^n - x^n$ 的展開式來作對應的配型，配型的型態結構與各對應的回溯常數取值都很具規律性，在範例中就顯示出應用此規律性即能很輕快地操作運算並推演出完整的最適配多項式函數來。

[2] 差分運算與逆向差分運算是反運算，就像微分和積分是互為反運算的情形。差分是求單位間距的變化，求其間距的平均斜率，而逆向差分是求重組成較高一次數的函數式，求多項式曲線下的面積，兩者背道而馳，讀者應可領略到它們的密切關係，如同大自然運行的規範與和諧。

[3] 根據已知的有限項數值來找到一個熟悉的規律使能夠將給定的所有項都滿足的公式以作為一般項公式，而這公式僅是代表與此有限項數值相涵蓋關聯的其中一個適配函數，卻並非唯一。例如：給一個有限數列； 1 , 5 , 13 , 29 、由 4 個數據組成，則滿足這個數列的函數有很多，例如： $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+\frac{16}{3}x-3$ 與 $g(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+\frac{16}{3}x-3+(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\cdot B(x)$ ，此處 $B(x)\neq 0$ ，還有 $h(x)=2^{x+1}-3$ 等至少 3 個表示式。另給有限數列； 6 , 6 , 12 , 18 ，由 4 個數據組成，則滿足這個有限數列的一般項函數有 $p(x)=-x^3+9x^2-20x+18$ 與 $q(x)=\frac{6\sqrt{5}}{5}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^x-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^x]$ 等至少 2 個表示式。

[4] 當 x 坐標不是依序排列的正整數數列，而是非等間隔實數數列時，例如：要找通過平面上五個坐標點 (1.2,5) , (2,7) , (3.3,11) , (4.5,31) , (6.7,81) 的多項式函數，就得應用牛頓或拉格朗日插值多項式的公式解法。

[5] 感謝審稿委員大胸襟的指導與提示眾多寶貴意見，得以完成本文。

參考文獻

蔡聰明(2010)：**數學拾貝----星空燦爛的數學**。三民書局。

蔡聰明：多項函數的插值公式。**數學傳播季刊 157 期**(第 40 卷 1 期)，2016 年 3 月出版發行。

陳建燁(2017)：**牛頓插值多項式的係數**。高中數學學科中心電子報，第 120 期。臺北市立第一女子高級中學數學教師。

黃武雄(1980)：**中西數學簡史**。人間文化事業公司。

林聰源(1995)：**數學史----古典篇**。凡異出版社。

L. Brutman (1997). *Lebesgue functions for polynomial interpolation* — a survey, Ann. Numer. Math.4, 111–127.

M. Schatzman (2002). *Numerical Analysis: A Mathematical Introduction*, Chapter 4. Clarendon Press, Oxford. ISBN 0-19-850279-6.

E. Süli and D. Mayers (2003). *An Introduction to Numerical Analysis*, Chapter 6. Cambridge University Press. ISBN 0-521-00794-1.