用二項式定理推導 n 次方根與倒數的近似值數列

廖育熔

國立新竹高級工業職業學校綜合高中部

壹、前言

新實施的 108 課綱中，數學領域針對計算機在數值計算部分的應用，較以往的課程都多加著墨了不少。高一的課程裡，我學習到了非負實數的 n 次方根計算，所用的計算方式是十分逼近法。而在未來高三的數學甲課程中，老師告訴我會在「微分的應用」這單元裡介紹如何使用 Newton 切線法來計算平方根的近似值。然而這兩個方法都不是那麼平易近人，一則計算繁冗，一則踏入了高等數學領域。本文使用二項式定理推導 n 次方根的近似值遞迴數列，迴避了十分逼近法的繁冗，也無需使用高等數學的微分法。然後利用同樣的精神給出了在 Marc Chamberland (2015)所介紹的倒數近似值數列的一個簡便證明。該數列的特色在於只需要用乘法和減法，就可以達到除法的效果。這個特點對於設計電子電路處理器的算術單元顯見有相當的益處。

貳、n 次方根的近似值數列

一、定理的敘述與推導

首先回顧 n 次方根的定義：

設 a 為非負實數，n 為正整數，$a^{\frac{1}{n}}$ 或是說 $\sqrt[n]{a}$，是藉由繪製兩條函數曲線 $y=x^n$ 與 $y=a$，它們必有交點，交點數至多有 2 個，其中必有一個，且只有一個交點的座標是非負的，我們便將那個非負的 x 座標定義為 a 的 n 分之一次方。

簡單的例子譬如：$\sqrt{4}=2$, $\sqrt[3]{27}=3$, $\sqrt[4]{625}=5$。

但是我們通常要計算的數值沒有那麼幸運都是平方數、立方數…。就以 $\sqrt[3]{20}$ 來說，這個數無法一眼就知道它的小數展開式，只能按計算機才知道 $\sqrt[3]{20}\approx 2.7144176165$。以下用二項式定理推導近似值計算求法。

假定我們要開方的數為 a，開方次數為 n。我們可以不失一般性地限定 $a>1$。

第 1 次的近似計算是估計 $\sqrt[n]{a}$ 的整數值。我們先做出一張非負整數 n 次方的數值表格：

正整數 k	1	2	$\cdots$	d	$d+1$
k^n	1	2^n	$\cdots$	d^n	$(d+1)^n$

假定在上表中，我們發現 $d^n=a$，那麼 $\sqrt[n]{a}$ 就是 d 了。然而誠如前言所述，這樣的情況相當少見，所以通常一般是

$$d^n \le a < (d+1)^n.$$

也就是說d^n與$(d+1)^n$這兩數會夾住a，從而d與$d+1$會夾住$\sqrt[n]{a}$，所以便有

$$\sqrt[n]{a} = d.\cdots.$$

第 1 次的估計就完成了，我們將這次的估計結果記做 $x_1 = d$。

接著要如何求出更進一步的、第二次的估計值呢？由於我們要再進行下一次估計，意味著上一次估計並非完全準確，存在著誤差。假設第 1 次估計的誤差為e_1，於是有等式：

$$\sqrt[n]{a} = x_1 + e_1.$$

其中$x_1 = d$，而誤差e_1為純小數。對此式左右兩邊同時 n 次方得

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = (x_1 + e_1)^n.$$

左邊根據 n 次方根的定義就是 a，右邊則使用二項式定理展開得

$$a = \binom{n}{0} x_1^n \cdot e_1^0 + \binom{n}{1} x_1^{n-1} \cdot e_1^1 + \binom{n}{2} x_1^{n-2} \cdot e_1^2 + \cdots + \binom{n}{n} x_1^0 \cdot e_1^n$$

$$= x_1^n + n \cdot x_1^{n-1} \cdot e_1 + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2} \cdot x_1^{n-2} \cdot e_1^2 + \cdots + e_1^n}_{e_1^2\text{的倍數}}$$

在以上的展開式中，從第 3 項起的所有項忽略不計，取前兩項，得到

$$a \ge x_1^n + n \cdot x_1^{n-1} \cdot e_1.$$

於是

$$e_1 \le \frac{a - x_1^n}{n \cdot x_1^{n-1}}.$$

那麼

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{a} &= x_1 + e_1 \\
&\le x_1 + \frac{a - x_1^n}{n \cdot x_1^{n-1}} \\
&= \frac{n \cdot x_1^n + a - x_1^n}{n \cdot x_1^{n-1}} \\
&= \frac{x_1^n(n-1) + a}{n \cdot x_1^{n-1}} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{x_1^n(n-1) + a}{x_1^{n-1}} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{x_1^n(n-1)}{x_1^{n-1}} + \frac{a}{x_1^{n-1}}\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[x_1(n-1) + \frac{a}{x_1^{n-1}}\right].
\end{aligned}$$

將上面的計算結果取為第 2 次估計x_2，

$$x_2 = \frac{1}{n}\left[x_1(n-1) + \frac{a}{x_1^{n-1}}\right].$$

利用相同的想法，假定我們已經求出$\sqrt[n]{a}$的第 i 次估計x_{i+1}，那麼我們可以馬上寫出第$i+1$次估計x_{i+1}為

$$x_{i+1} = \frac{1}{n}\left[x_i(n-1) + \frac{a}{x_i^{n-1}}\right].$$

定理 1：

設 a 為非負實數且$a > 1$，n 為正整數，那麼我們可以用以下的遞迴數列去逼近$\sqrt[n]{a}$，求出$\sqrt[n]{a}$的近似值：

$$\begin{cases} x_1 = \text{非負整數近似值，用}n\text{次方表格估計，且取}x_1 \le a \\ x_{i+1} = \dfrac{1}{n}\left[(n-1)x_i + \dfrac{a}{x_i^{n-1}}\right], x_i\text{是第}i\text{次估計值} \end{cases}.$$

二、例子

下面我們就以$\sqrt[3]{20}$為例來驗證我們所推導的公式的有效性。套入以上公式，此時$n=3, a=20$。

首先計算x_1，利用三次方的表格

k	1	2	3
k^3	1	8	27

得到

$$2^3 \leq 20 < (2+1)^3.$$

所以

$$\sqrt[3]{20} = 2.\cdots.$$

因此

$$x_1 = 2.$$

接著將x_1代入遞迴公式，得x_2：

$$x_2 = \frac{1}{3}\left(2x_1 + \frac{20}{x_1^2}\right) = \frac{1}{3}\left(2\cdot 2 + \frac{20}{4}\right) = 3.$$

再將x_2代入，得x_3：

$$x_3 = \frac{1}{3}\left(2x_2 + \frac{20}{x_2^2}\right) = \frac{1}{3}\left(2\cdot\ 3 + \frac{20}{9}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{74}{9} \approx 2.740740.$$

類似的計算，得x_4與x_5

$$x_4 = \frac{1}{3}\left(2x_3 + \frac{20}{x_3^3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left[2\cdot\frac{74}{27} + \frac{20}{\left(\frac{74}{27}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{301027}{110889} \approx 2.714669.$$

$$x_5 = \frac{1}{3}\left(2x_4 + \frac{20}{x_4^2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left[2\cdot\frac{301027}{110889} + \frac{20}{\left(\frac{301027}{110889}\right)^2}\right]$$

$$\approx 2.71441763997.$$

直接按計算機計算的近似值是 2.71441761659490657151808946967 95。和我們以上計算結果相比較，每一次的估計精度如下表所示：

估計值		與計算機結果相比較
x_1	2	準確到個位
x_2	3	偏差過大
x_3	2.740740	準確到小數後第 1 位
x_4	2.714669	準確到小數後第 3 位
x_5	2.71441763997	準確到小數後第 7 位

僅僅計算 5 次，我們就能得到精度到小數點後第 7 位的近似值，這樣的結果表示我們所推導的公式不僅是正確的，還具備了不錯的收斂速度。

三、收斂性的證明

上面的例子某種程度支持了我們所提出的算法會收斂到要計算的 n 次方根的值，以下我們給出收斂性的證明，確保這個算法的正確性。

首先，第$i+1$次的估計公式為

$$x_{i+1}=\frac{1}{n}\left[(n-1)x_i+\frac{a}{x_i^{n-1}}\right],$$

由此式可知，只要初始值x_1為正數，那麼接下來的$x_2,x_3,\cdots$都會是正數。由於$x_i>0$，根據算幾不等式，我們有

$$\begin{aligned}x_{i+1}&=\frac{1}{n}\left[(n-1)x_i+\frac{a}{x_i^{n-1}}\right]\\&=\frac{\overbrace{x_i+x_i+\cdots+x_i}^{n-1\text{ 個}}+\frac{a}{x_i^{n-1}}}{n}\\&\geq\sqrt[n]{\underbrace{x_i\cdot x_i\cdot\cdots\cdot x_i}_{n-1\text{ 個}}\cdot\frac{a}{x_i^{n-1}}}\\&=\sqrt[n]{a}(\text{下限}).\end{aligned}$$

這不等式告訴我們，無論第 1 次的估計值x_1如何，只要x_1為正數，那麼接下來的每次的估計值都會以$\sqrt[n]{a}$為下限（也就是我們算出來的近似值都是盈近似值）。

接著我們來比較x_i與x_{i+1}的大小，看看每次計算出來的數值會怎樣變化：

$$\begin{aligned}x_i-x_{i+1}&=x_i-\frac{1}{n}\left[(n-1)x_i+\frac{a}{x_i^{n-1}}\right]\\&=\frac{1}{n}\left[nx_i-(n-1)x_i-\frac{a}{x_i^{n-1}}\right]\\&=\frac{1}{n}\left(x_i-\frac{a}{x_i^{n-1}}\right)\\&=\frac{1}{nx_i^{n-1}}(x_i^n-a).\end{aligned}$$

而根據我們前面的討論，當$i\geq 2$的時候，$x_i\geq\sqrt[n]{a}$，因此可得

$$x_i-x_{i+1}\geq 0.$$

也就是$x_i\geq x_{i+1}$。這意味著我們算出來的結果會不斷的變小。

總結來說，根據我們提出的算法所計算出來的數值是遞減且有下限$\sqrt[n]{a}$，所以由實數的完備性公設，數列$\{x_i\}_{i=1}$一定有極限，假設為 L，此時有

$$\lim_{i\to\infty}x_{i+1}=L \quad \text{與} \quad \lim_{i\to\infty}x_i=L.$$

代入x_{i+1}與x_i的遞迴關係式，得到

$$\begin{aligned}&L=\frac{1}{n}\left[(n-1)L+\frac{a}{L^{n-1}}\right],\\&nL=(n-1)L+\frac{a}{L^{n-1}},\\&L^n=a,\\&L=\sqrt[n]{a}.\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{i\to\infty}x_i=\sqrt[n]{a}.$$

這表示我們的近似值數列$\{x_i\}_{i=1}$ 實會收斂到$\sqrt[n]{a}$。

參、倒數的近似值數列

一、定理的敘述與推導

我在 Marc Chamberland (2015)寫的書中，讀到了一個計算倒數的近似值公式，如下所述：

定理 2：

設$D>1$，我們可用以下的遞迴數列去計算 D 的倒數$\frac{1}{D}$的近似值：

$$\begin{cases}x_1=\text{取與}\ \dfrac{1}{D}\ \text{接近的分數}\ \dfrac{1}{d},\\ x_{i+1}=x_i(2-Dx_i)\text{，}x_i\text{是第}i\text{次估計值}.\end{cases}$$

此公式特別的地方在於「只用了乘法和減法，就達到了除法的效果」。書中稱「讀者不難採用了 Newton 切線法來推導這條公式」，但我還沒學過微積分，所以自然沒辦法依循書上的指示去推導。這條公式看起來很初等，有機會用高中數學導出嗎？答案是肯定的，下面用二項式定理，模仿前述關於 n 次方根公式的討論，給出這條公式的推導。

設近似值數列為$\{x_i\}_{i\geq 1}$。我們可選取正整數d與d'使得 D 介於這兩數之間：

$$d < D < d',$$

取倒數得

$$\frac{1}{d} > \frac{1}{D} > \frac{1}{d'},$$

那麼

$$\frac{1}{D} > \frac{1}{d'},$$

我們便可以取第 1 次的近似值x_1為

$$x_1 = \frac{1}{d'}.$$

命e_1為第 1 次的誤差，也就是有

$$\frac{1}{D} = x_1 + e_1.$$

計算e_1，並進行估計

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{D} - x_1 \\ &= \frac{1}{D}(1 - Dx_1) \\ &\geq x_1(1 - Dx_1). \end{aligned}$$

將e_1 的近似值代回，可得$\frac{1}{D}$ 的進一步近似：

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} &\geq x_1 + x_1(1 - Dx_1) \\ &= x_1(2 - Dx_1). \end{aligned}$$

於是我們可以取第 2 次的近似值$x_2 = x_1(2 - Dx_1)$。這個形式與書上刊載的定理的公式完全契合！

現在假定我們經過 i 次計算後得到近似值為x_i，也就是

$$\frac{1}{D} \approx x_i.$$

設e_i為第 i 次誤差，仿照由x_1推至x_2的計算，有

$$\frac{1}{D} = x_i + e_i,$$

$$\begin{aligned} e_i &= \frac{1}{D} - x_i \\ &= \frac{1}{D}(1 - Dx_i) \\ &\geq x_i(1 - Dx_i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} &\geq x_i + x_i(1 - Dx_i) \\ &= x_i(2 - Dx_i). \end{aligned}$$

因此得第$i+1$次的近似值 $x_{i+1} = x_i(2 - Dx_i)$。

二、例子

現在我們以$\frac{1}{7}$為例來驗證這條公式的有效性。此時$D = 7$，我們有

$$6 < 7 < 10,$$

$$\frac{1}{6} > \frac{1}{7} > \frac{1}{10},$$

因為$\frac{1}{10}$容易計算，我們取之作為第一次的

近似值

$$x_1 = \frac{1}{10} = 0.1.$$

再將x_1代入遞迴公式，得x_2：

$$x_2 = \frac{1}{10}\left(2 - 7 \cdot \frac{1}{10}\right) = \frac{13}{100} = 0.13.$$

再將x_2代入遞迴公式，得x_3：

$$x_3 = \frac{13}{100}\left(2 - 7 \cdot \frac{13}{100}\right) = \frac{1417}{10000} = 0.1417.$$

類似的計算，得x_4、x_5：

$$x_4 = \frac{1417}{10000}\left(2 - 7 \cdot \frac{1417}{10000}\right) = \frac{14284777}{100000000}$$

$$= 0.1428477.$$

$$x_5 = \frac{14284777}{100000000}\left(2 - 7 \cdot \frac{1428777}{100000000}\right)$$

$$= \frac{1428571422421897}{10000000000000000}$$

$$= 0.1428571422421897.$$

直接按計算機計算的近似值是 0.1428571428571428571。和我們以上計算結果相比較，每一次的估計精度如下表所示：

估計值		與計算機結果相比較
x_1	0.1	準確到小數後第 1 位
x_2	0.13.	準確到小數後第 1 位
x_3	0.1417	準確到小數後第 2 位
x_4	0.1428477	準確到小數後第 4 位
x_5	0.14285714 22421897	準確到小數後第 9 位

三、收斂性的證明

現在我們來討論近似值數列$\{x_i\}_{i\geq 1}$的收斂性。首先，第$i+1$次的估計值x_{i+1}與實際值$\frac{1}{D}$的絕對誤差為$\left|x_{i+1} - \frac{1}{D}\right|$。根據數列的遞迴公式，將$x_{i+1}$與$x_i$關係式$x_{i+1} = x_i(2 - Dx_i)$代入後得

$$\left|x_{i+1} - \frac{1}{D}\right| = \left|x_i(2 - Dx_i) - \frac{1}{D}\right|$$

$$= \left|\frac{Dx_i(2 - Dx_i) - 1}{D}\right|$$

$$= \left|\frac{2Dx_i - D^2x_i^2 - 1}{D}\right|$$

$$= \frac{1}{D}(Dx_i - 1)^2$$

$$= |Dx_i - 1| \cdot \left|x_i - \frac{1}{D}\right|.$$

由此得到了第$i+1$次誤差與第 i 次誤差的關係。若是再加入條件$|Dx_i - 1| < 1$，則會使第$i+1$次誤差比第 i 次誤差變得更小，也就是有

$$0 < \cdots < \left|x_{i+1} - \frac{1}{D}\right| < \left|x_i - \frac{1}{D}\right| < \cdots < \left|x_1 - \frac{1}{D}\right|.$$

因此可知絕對誤差數列的極限確實存在，於是可假設$\lim_{i\to\infty}\left|x_i - \frac{1}{D}\right| = L$。那麼有

$$L = \lim_{i\to\infty}\left|x_{i+1} - \frac{1}{D}\right|$$

$$= \lim_{i\to\infty}\frac{1}{D}(Dx_i - 1)^2$$

$$= \lim_{i\to\infty} D\left|x_i - \frac{1}{D}\right|^2 = D \cdot L^2$$

解得

$$L = 0 \text{ 或 } \frac{1}{D}.$$

然而根據我們所加入的收斂條件$|Dx_i -$

$1| < 1$，數列首項x_1會滿足$\left|x_1 - \frac{1}{D}\right| < \frac{1}{D}$，這意味著$L \neq \frac{1}{D}$，所以$L = 0$。因此

$$\lim_{i\to\infty}\left|x_i - \frac{1}{D}\right| = 0 \Rightarrow \lim_{i\to\infty}\left(x_i - \frac{1}{D}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} x_i = \frac{1}{D}.$$

以上就證明了近似值數列$\{x_i\}_{i=1}$確實會收斂到$\frac{1}{D}$。

但注意到在證明中加入了收斂的前提條件為$|Dx_i - 1| < 1$，亦即

$$0 < x_i < \frac{2}{D}.$$

因此，如果初始近似值x_1取小於$\frac{2}{D}$的正數，就會使誤差不斷的縮小，達成收斂的效果。

但如何選取適當的x_1呢？假定$x_1 = \frac{1}{d_1}$，其中d_1為正整數，代入收斂條件，有

$$0 < \frac{1}{d_1} < \frac{2}{D}.$$

將$\frac{2}{D}$改寫為$\frac{1}{D/2}$，可得$\mathrm{d}_1 > \frac{\mathrm{D}}{2}$，因此可以取$d_1$為大於$\frac{D}{2}$的最小正整數。比如要計算$\frac{1}{7}$，此時$D = 7, \frac{D}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$，我們便可以取$d_1 = 4$，故$x_1 = \frac{1}{4}$，這樣代入遞迴式就保證了收斂性。

參考文獻

王曉明、王蕊珂（2010）：從牛頓二項式定理開方到牛頓切線法。**數學傳播季刊，34**(4)，87-90，中央研究院數學研究所。

周伯欣(2016)：*n* 元算幾不等式的一個幾何證明。**數學傳播季刊，40**(3)，22-27，中央研究院數學研究所。

Marc Chamberland (2015). *Single Digits: In Praise of Small Numbers*. Princeton University Press.

附註

本文撰寫過程中，承蒙周伯欣老師耐心指導與校稿修正，特此致謝。