先取完球問題與重複組合的相遇

楊宗穎* 楊閔茹

臺北市立第一女子高級中學

壹、前言

在高中機率的單元中，取球問題是常見的題型之一。若袋中 3 紅球、4 白球與 5 藍球，今依序取球，取後不放回，則紅球先取完的機率為何？依照先取完球的顏色順序進行分類，其機率為 $\frac{5}{12}\times\frac{4}{7}+\frac{4}{12}\times\frac{5}{8}=\frac{25}{56}$。這個問題在各校段考題經常出現，其中常見的解法在計算上並不困難，但在教學現場，學生卻不容易參透解法的精髓，大多數的學生就是似懂非懂的把規則記起來，但在課堂上仍有少數學生希望用確切的排列組合技巧來計算排列的數量，利用球的特殊排列所佔全體的比例來計算機率。本文試著利用重複組合的概念，來計算取球特殊的排列情形（指定取完球顏色的順序），希望能以另一種觀點提供教學現場的教師與學生參考。

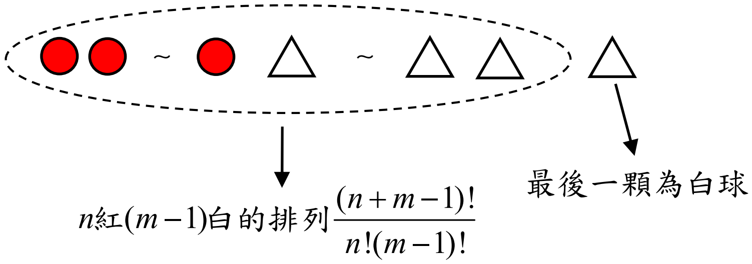
貳、基本知識

以下為閱讀本文前的基本知識：

1. 若袋中有 n 紅球與 m 白球，從袋中依序取球，則最後一顆為白球的機率為 $\frac{m}{n+m}$。

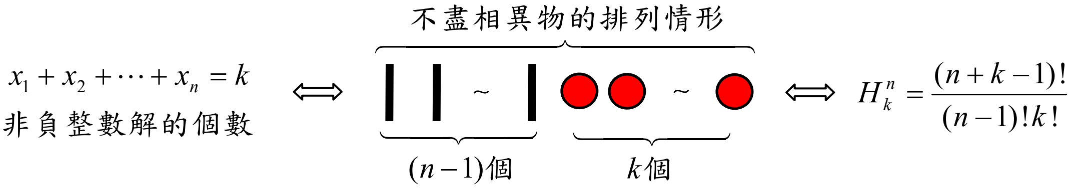
   令 S 為所有取球情形的樣本空間，W 為最後一顆為白球的事件。上述結論可以用球的排列數來計算，其中 n 紅球與 m 白球的排列情形共有 $|S|=\frac{(n+m)!}{n!m!}$。其中最後一球為白球的特殊排列數為 $|W|=\frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$。因此最後一顆為白球的機率為 $P(W)=\frac{|W|}{|S|}=\frac{m}{n+m}$。

*為本文通訊作者



2. 若 n 與 k 皆為自然數，則 $x_1+x_2+\cdots+x_n=k$ 的非負整數解的個數為 $\dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ 。

方便起見，將此數記為 H_k^n 。



重複組合的單元已消失於 108 課綱，但學生仍可輕易的透過不盡相異物的排列來理解重複組合，在教學現場中可適當補充。

參、3 紅 4 白 5 藍-紅球先取完的機率

若袋中有 3 紅球與 4 白球，從袋中依序取球，令 W 為最後一顆為白球的事件、 A 為紅球先取完的事件，從邏輯上可知事件 A 與事件 W 是等價的，因此 $P(A)=P(W)=\dfrac{4}{3+4}=\dfrac{4}{7}$ 。

若袋中的顏色增加後，情況將稍微變複雜。今考慮袋中有 3 紅球、4 白球與 5 藍球，從袋中依序取球，取後不放回。令 A 為紅球先取完的事件，依照其餘顏色被取完順序上的不同，根據機率的加法原理，事件 A 可再區分為兩種類型：

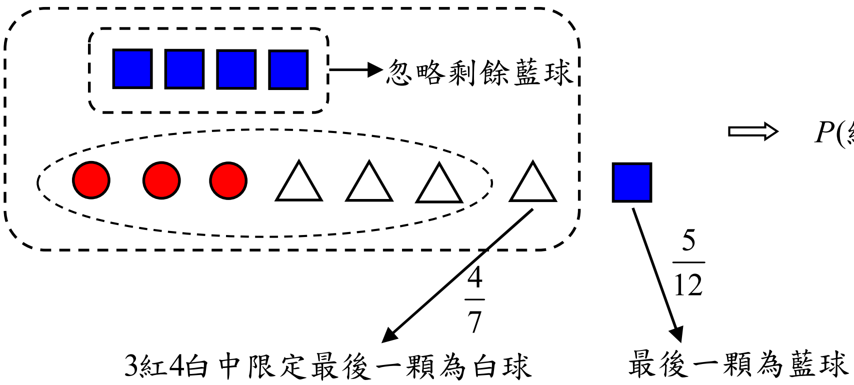
(1) 紅色取完後、白色才取完，最後藍色才取完。將此事件記為『紅 $\to$ 白 $\to$ 藍』；

(2) 紅色取完後、藍色才取完，最後白色才取完。將此事件記為『紅 $\to$ 藍 $\to$ 白』。

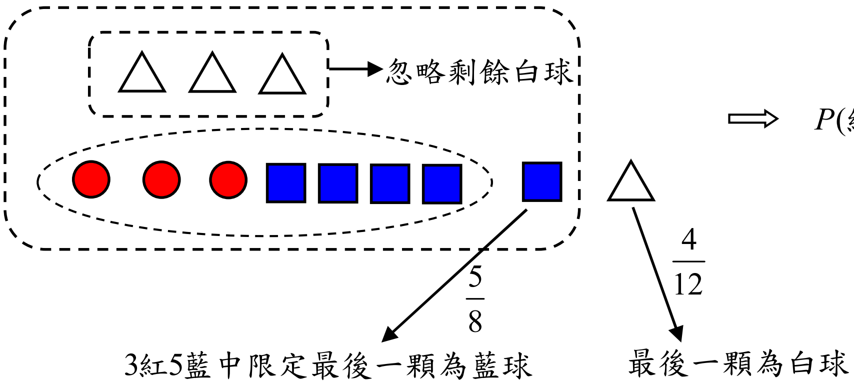
可知 $P(A)=P(\text{紅}\to\text{白}\to\text{藍})+P(\text{紅}\to\text{藍}\to\text{白})$ 。

一般我們會跟學生說明機率 $P(紅\to白\to藍)=\frac{5}{12}\times\frac{4}{7}$，其概念為先考慮藍色為最後一顆的機率 $P(藍球為最後一顆)=\frac{5}{12}$；然後在藍球為最後一顆的條件下，考慮 3 紅球與 4 白球中白色為最後一顆的條件機率 P(最後一個白球出現在所有紅球之後｜藍球為最後一顆)，我們可以解釋為，因為已經確定整體的最後一顆為藍球，故可忽略前方剩餘的 4 藍球，僅考慮 3 紅球與 4 白球的取球情形即可，在此狀況下，前方的 3 紅球與 4 白球中，白球在最後一顆的機率即可視為 $\frac{4}{7}$，因此條件機率 P(最後一個白球出現在所有紅球之後｜藍球為最後一顆)= $\frac{4}{7}$。根據機率的乘法原理，可推得 $P(紅\to白\to藍)=\frac{5}{12}\times\frac{4}{7}$。同理，$P(紅\to藍\to白)=\frac{4}{12}\times\frac{5}{8}$。

因此紅球先取完的機率為 $P(A)=P(紅\to白\to藍)+P(紅\to藍\to白)=\frac{5}{12}\times\frac{4}{7}+\frac{4}{12}\times\frac{5}{8}$。

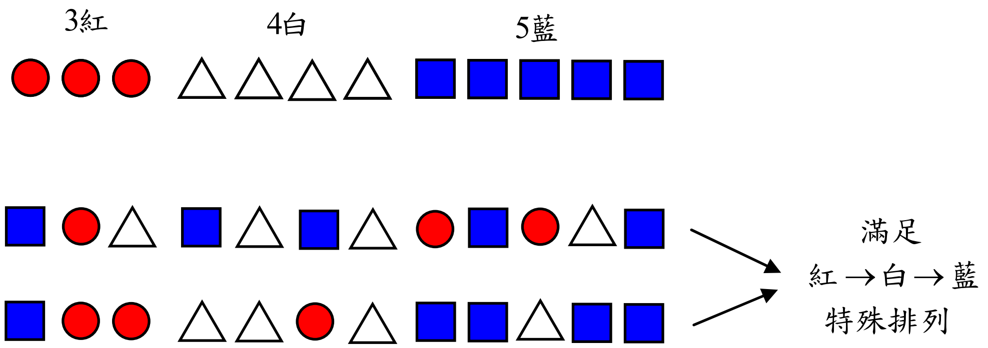


$\Longrightarrow$ $P(紅\to白\to藍)=\frac{5}{12}\times\frac{4}{7}$



$\Longrightarrow$ $P(紅\to藍\to白)=\frac{4}{12}\times\frac{5}{8}$

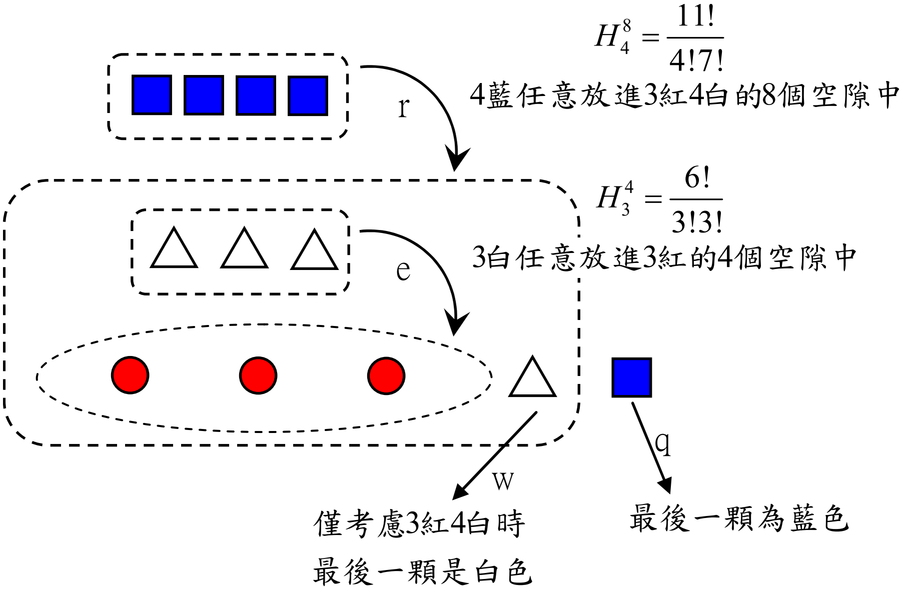
上述的作法看似簡單且直觀，但往往在教學現場中，總是有學生對這樣的解釋有所質疑，『若最後一顆是藍球，為何可以將前方剩餘的藍球忽略不計呢？』追求實是的學生總是希望能將真實的排列數給計算出來，進一步看所佔全體排列數的比例，才能接受 $P(\text{紅}\to\text{白}\to\text{藍})=\frac{5}{12}\times\frac{4}{7}$ 的事實。因此我們試圖將符合『紅色取完後、白色才取完，最後藍色才取完』的排列情形總數求出，簡稱『滿足紅 $\to$ 白 $\to$ 藍的特殊排列數』。



我們依序分四個步驟完成『滿足紅→白→藍的特殊排列數』:

1. 先將最後一顆球限定為藍球；
2. 在前方的 3 紅球、4 白球中，限定最後一顆是白球；
3. 考慮前方剩餘的 3 白球，任意放進 3 紅球的 4 個空隙中，其方法數為 H^4_3 種；
4. 考慮前方剩餘的 4 藍球，任意放進 3 紅球、4 白球的 8 個空隙中，其方法數為 H^8_4 種；

根據上述四個步驟，可知滿足紅 $\to$ 白 $\to$ 藍的特殊排列數為 $H^4_3\times H^8_4$，而全體的排列數為 $\frac{12!}{3!4!5!}$，由此可知 $P(\text{紅}\to\text{白}\to\text{藍})=\dfrac{H^4_3\times H^8_4}{\frac{12!}{3!4!5!}}=\dfrac{\frac{6!}{3!3!}\times\frac{11!}{4!7!}}{\frac{12!}{3!4!5!}}=\frac{5\times 4}{12\times 7}$。



$$\Longrightarrow P(\text{紅}\to\text{白}\to\text{藍})=\frac{H_3^4\times H_4^8}{\frac{12!}{3!4!5!}}=\frac{\frac{6!}{3!3!}\times\frac{11!}{4!7!}}{\frac{12!}{3!4!5!}}=\frac{5\times 4}{12\times 7}$$

同理，可知滿足 紅$\to$藍$\to$白 的特殊排列數為 $H_4^4\times H_3^9$，故

$$P(\text{紅}\to\text{藍}\to\text{白})=\frac{H_4^4\times H_3^9}{\frac{12!}{3!4!5!}}=\frac{\frac{7!}{4!3!}\times\frac{11!}{3!8!}}{\frac{12!}{3!4!5!}}=\frac{4\times 5}{12\times 8}\text{。}$$

肆、指定顏色取完順序的特殊排列數與機率

我們將上述 3 紅球、4 白球與 5 藍球的情況，推廣到一般 n 種顏色的球。方便起見，我們將顏色用編號表示。令編號 i 的球數為 k_i，其中對於 $i=1,2\cdots,n$，定義 $t_i=k_1+k_2+\cdots+k_i$。以下我們討論，依序抽球，滿足先取完球的順序為『$1\to 2\to\cdots\to n$』的特殊排列數。

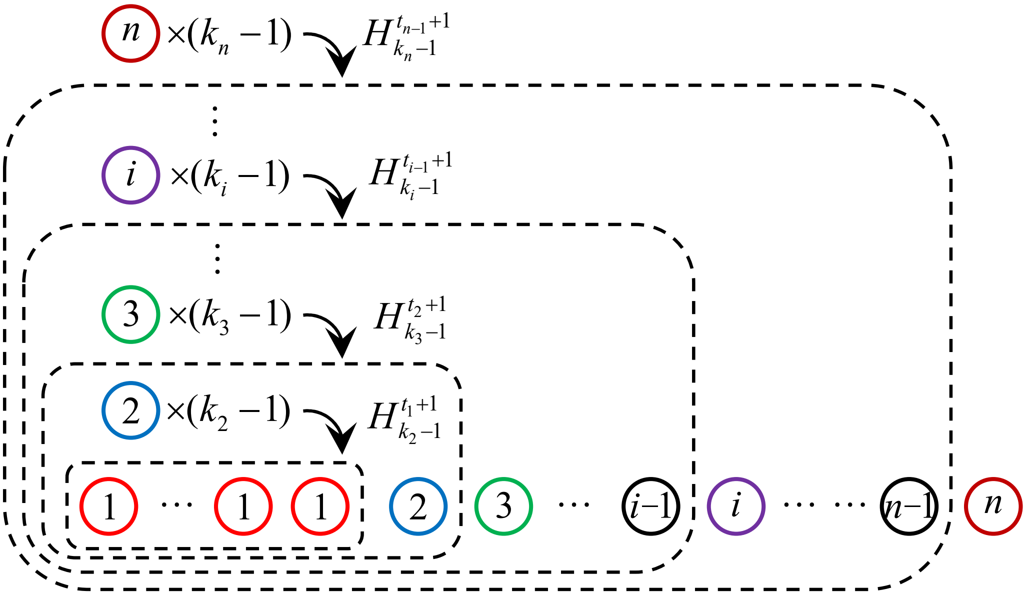
我們可依序下列步驟完成『滿足$1\to 2\to\cdots\to n$的特殊排列數』:

1. 將1號球全取出，其餘號碼皆先取一顆，並將此 k_1+n-1 顆球依照號碼由小至大排列；
2. 考慮剩餘的 (k_2-1) 顆 2 號球，任意放進 t_1 顆1號球的 t_1+1 個空隙中，其方法數為

$H_{k_2-1}^{t_1+1}$ 種；

3. 考慮剩餘的 (k_3-1) 顆 3 號球，任意放進 t_2 顆 $1\sim 2$ 號球的 t_2+1 個空隙中，其方法數為 $H_{k_3-1}^{t_2+1}$ 種；

4. 依此類推，依序令 $i=4\sim n$，考慮剩餘的 (k_i-1) 顆 i 號球，任意放進 t_{i-1} 顆 $1\sim(i-1)$ 號球的 $t_{i-1}+1$ 個空隙中，其方法數為 $H_{k_i-1}^{t_{i-1}+1}$ 種。



由上述方式可得滿足先取完球的順序為『$1\to 2\to\cdots\to n$』的特殊排列數為：

$$\prod_{i=2}^{n} H_{k_i-1}^{t_{i-1}+1} = H_{k_2-1}^{t_1+1}\times H_{k_3-1}^{t_2+1}\times H_{k_4-1}^{t_3+1}\times\cdots\times H_{k_{n-1}-1}^{t_{n-2}+1}\times H_{k_n-1}^{t_{n-1}+1}$$

$$=\frac{(t_2-1)!}{(k_2-1)!k_1!}\times\frac{(t_3-1)!}{(k_3-1)!t_2!}\times\cdots\times\frac{(t_{n-1}-1)!}{(k_{n-1}-1)!t_{n-2}!}\times\frac{(t_n-1)!}{(k_n-1)!t_{n-1}!}$$

此 t_n 顆球的總排列數為 $\dfrac{t_n!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$，所以先取完球的順序為『$1\to 2\to\cdots\to n$』的機率為：

$$\prod_{i=2}^{n} H_{k_i-1}^{t_{i-1}+1}\times\frac{k_1!k_2!\cdots k_n!}{t_n!}=\frac{(t_2-1)!}{(k_2-1)!k_1!}\times\frac{(t_3-1)!}{(k_3-1)!t_2!}\times\cdots\times\frac{(t_{n-1}-1)!}{(k_{n-1}-1)!t_{n-2}!}\times\frac{(t_n-1)!}{(k_n-1)!t_{n-1}!}\times\frac{k_1!k_2!\cdots k_n!}{t_n!}$$

$$=\frac{1}{1}\times\frac{1}{t_2}\times\cdots\times\frac{1}{t_{n-2}}\times\frac{1}{t_{n-1}}\times\frac{k_2\times\cdots\times k_n}{t_n}$$
$$=\frac{k_2}{t_2}\times\frac{k_3}{t_3}\times\cdots\times\frac{k_{n-2}}{t_{n-2}}\times\frac{k_{n-1}}{t_{n-1}}\times\frac{k_n}{t_n}=\prod_{i=2}^{n}\frac{k_i}{t_i}$$

先取完球指定順序的機率

令編號為 i 的球有 k_i 顆，定義 $t_i=k_1+k_2+\cdots+k_i$ ，其中 $i=1,2\cdots,n$ ，則：

1. 先取完球的順序為『$1\to 2\to\cdots\to n$』的特殊排列數為 $\prod_{i=2}^{n}H_{k_i-1}^{t_{i-1}+1}$ ；
2. 先取完球的順序為『$1\to 2\to\cdots\to n$』的機率為 $\prod_{i=2}^{n}\frac{k_i}{t_i}$ 。

伍、固定某編號先取完的機率

今考慮 n 種編號的球，編號為 i 的球有 k_i 顆，其中 $i=1,2\cdots,n$ 。定義一對一且映成函數 $\sigma:\{1,2,\cdots,n\}\to\{1,2,\cdots,n\}$，可知序列 $\left(\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n)\right)$ 為 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一個排列，在此亦稱函數 σ 為集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一個排列，因此函數 σ 共有 $n!$ 種不同的情形。若特別指定 $\sigma(1)$ 的值，則滿足條件的函數 σ 共有 $(n-1)!$ 種不同的情形。對於固定的一個排列函數 σ ，對任意 $i=1,2\cdots,n$ ，定義 $t_{\sigma,i}=k_{\sigma(1)}+k_{\sigma(2)}+\cdots+k_{\sigma(i)}$ 。

對於 $i=1,2\cdots,n$ ，今有編號為 i 的球有 k_i 顆，依序抽球，可知 1 號球先取完的機率可依後續 $2\sim n$ 號球先取完的不同順序進行分類，根據加法原理可知：

$$P(1\text{號球先取完})=\sum_{\substack{\sigma\text{為}\{1,2,\cdots,n\}\text{的排列}\\ \text{且滿足}\sigma(1)=1}}P\left(\sigma(1)\to\sigma(2)\to\sigma(3)\to\cdots\to\sigma(n)\right)$$
$$=\sum_{\substack{\sigma\text{為}\{1,2,\cdots,n\}\text{的排列}\\ \text{且滿足}\sigma(1)=1}}P\left(1\to\sigma(2)\to\sigma(3)\to\cdots\to\sigma(n)\right)$$
$$=\sum_{\substack{\sigma\text{為}\{1,2,\cdots,n\}\text{的排列}\\ \text{且滿足}\sigma(1)=1}}\left(\prod_{i=2}^{n}\frac{k_{\sigma(i)}}{t_{\sigma,i}}\right)$$

對於一般情形，考慮 j 號球先取完的機率即為 $P(j\text{號球先取完})=\sum_{\substack{\sigma\text{為}\{1,2,\cdots,n\}\text{的排列}\\ \text{且滿足}\sigma(1)=j}}\left(\prod_{i=2}^{n}\frac{k_{\sigma(i)}}{t_{\sigma,i}}\right)$ 。

先取完球的機率

若函數 σ 為集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一個排列，則定義 $t_{\sigma,i}=k_{\sigma(1)}+k_{\sigma(2)}+\cdots+k_{\sigma(i)}$ 。考慮 $i=1,2\cdots,n$ ，令編號為 i 的球有 k_i 顆，依序取球，則 j 號球先取完的機率為

$$\sum_{\substack{\sigma\text{為}\{1,2,\cdots,n\}\text{的排列}\\ \text{且滿足}\sigma(1)=j}}\left(\prod_{i=2}^{n}\frac{k_{\sigma(i)}}{t_{\sigma,i}}\right)\text{。}$$

上述的機率結果，看似雖然符號看似較為抽象，但整體的形式簡單，背後蘊藏的道理並不困難，在教學現場中可以讓有興趣的學生挑戰操作數學語言的能力。若要實際計算，亦可翻譯為程式來執行運算過程。教學上若能引領學生走一回排列組合的大千世界，教學相長，實為作為教育工作者之樂趣。

陸、結語

取完球問題在〈組合計數的方法兩則〉文章中，李政豐老師利用『排容原理』與『狄摩根定律』兩定理求得『紅球先取完的不盡相異物排列數的機率』；而本文利用『重複組合』的概念，透過簡易的例子說明，將特殊排列數計算出來，再進一步看所佔全體排列數的比例得其機率，嘗試增加袋中的顏色數與球數，用相同的運算思維求某顏色球先取完的機率，觀察出運算過程中重複組合連乘的規律，進而整理並推導得一般化的機率公式。本文提供讀者使用不同的觀點解決問題，教師也能在教學現場做適當的補充，說明其機率背後的來由與計算過程的巧妙之處，讓學生不單單只記憶公式結果，而是增強學生對數學的理解與推理，啟發學生在組合與機率上的認知。

參考資料：

普通高級中學數學（2018），第二冊。南一書局。
普通高級中學數學（2018），第二冊。翰林書局。
李政豐（2004），組合計數的方法兩則。**數學傳播季刊，28** 卷 2 期，43-58。