三角形三內角的正弦數值均為有理數值的整數邊長 ΔABC

李輝濱

嘉義市私立輔仁中學退休教師

壹、緒論

三角形性質和三角函數對長度和角度的尋求在科學應用上是有舉足輕重作用，尤其在導航、工程學、導引飛彈等的精密設計用途。正弦定理與餘弦定理是理解三角形邊角關係內涵的兩大基本知識工具，亦是解三角函數題型的應用樞紐。一般而言，討論三角形時都是以整數邊長的三角形為多；幸運的是這類三角形各內角餘弦值皆是有理數，反之，其各內角正弦值卻可能皆是有理數，或可能皆是無理數，或可能部份無理數。於此，要深入理解各內角正弦值皆是有理數情況，特來探索 $\sin A+\sin B+\sin C$ 為有理數值的整數邊長 ΔABC 之各邊長 a,b,c 關係。

畢氏三元數組 (a,b,c)，其關係式為 $a^2=b^2+c^2$ 且 $a>b>c$ 或 $a>c>b$，$b+c>a$。此處研究要多方應用畢氏三元數的生成公式。文獻也參考了費馬從解析幾何的單位圓觀點而得出的公式組(黃文達)，或歐幾里得應用幾何相似形與單位圓結合的概念而得出的同一公式組一樣(蔡聰明)。

貳、預備知識

引理 1. 正弦定理與餘弦定理：

正弦定理：ΔABC 之各邊長 a,b,c，圖 1.，則 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，

R 為 ΔABC 的外接圓半徑。

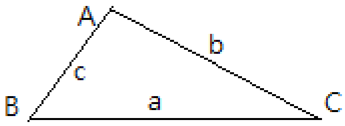


圖 1.

餘弦定理：圖 1. ΔABC 中有 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$ 關係式，也可寫成下式；

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

引理 2. 本原畢氏三元數組 (a,b,c)，$a^2=b^2+c^2$ ；其生成公式：

$a=u^2+v^2$ ，$b=u^2-v^2$ ，$c=2uv$ 或 $a=u^2+v^2$ ，$b=2uv$ ，$c=u^2-v^2$，

$u>v$，u 與 v 皆為正整數。

再取 $a=n\cdot(u^2+v^2)$ ， $b=n\cdot(u^2-v^2)$ 或 $n\cdot 2uv$ ， $c=n\cdot 2uv$ 或 $n\cdot(u^2-v^2)$，

$u>v$， n 為正整數，u 與 v 互質，此為三元數組的完全生成公式通解。

三元數組的完全生成公式通解則恰好窮盡滿足了 $a^2=b^2+c^2$ 正整數解。

參、本文

A. 探討 $\sin A$、$\sin B$、$\sin C$ 為有理數值的整數邊長 ΔABC 之各邊長 a,b,c 關係 首先來描述 ΔABC 的 $\sin A+\sin B+\sin C$ 與各整數邊長 a,b,c 關係；由引理 1.餘弦定理與 $\sin^2 A=1-\cos^2 A$ 相互連結關係，作聯立運算，得

$$\sin^2 A=1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2=\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$=(1/2bc)^2[a^2-(b-c)^2][(b+c)^2-a^2]$$

$$=\left(\frac{1}{2bc}\right)^2(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c) \quad\Rightarrow$$

$$\sin A=\frac{1}{2bc}\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)}$$ ，由正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

的邊長與角度關係，再得出 $\sin B=\dfrac{1}{2ca}\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)}$ 與

$$\sin C=\frac{1}{2ab}\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)}$$

因此，$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{(a+b+c)}{2abc}\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)} \qquad (1)$$

這裡可看出；$\sin A+\sin B+\sin C$ 要成為有理數就必須使根號 $\sqrt{\ }$ 內的 4 項連乘積式化成完全平方式。找到配合的關鍵要素，即能達成完全平方式效果。

B. 設 ΔABC 的 3 整數邊長關係為 $a\ge b\ge c$ 且 $b+c>a$ 。探討有理數情形如下；

[1] 若 ΔABC 為正三角形，即 $a=b=c$，則 $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ，結果的數值不合，即任意正三角形都不能使 $\sin A+\sin B+\sin C$ 成為有理數。

[2] 若 ΔABC 為等腰三角形，即 $[a,b,b]$型，或 $[a,a,c]$型，下列分別敘述討論。

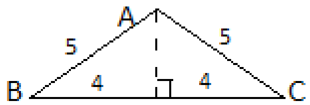
(2a) 尋找 $[a,b,b]$型條件下的第 1 類整數邊長等腰三角形： a 與 b 互質。

(2a-1) 當 $b=c$，則 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)=(2b-a)(a)(a)(a+2b)=a^2(2b-a)(a+2b)$ ，取 $(2b-a)(a+2b)=t^2 \Rightarrow b^2=(a/2)^2+(t/2)^2$ 且 $a\ne t$，

得$(b,\frac{a}{2},\frac{t}{2})$ 為畢氏三元數組，且$b,\frac{a}{2},\frac{t}{2}$三者互質，所以 $b=u^2+v^2$ ，$a=4uv$或$2(u^2-v^2)$ ，$t=2(u^2-v^2)$或$4uv$，可得 3 邊長分別為$4uv$或$2(u^2-v^2)$，u^2+v^2，u^2+v^2結構的等腰三角形，$u>v$，u與v皆為正整數，u與v互質，而其 $\sin A+\sin B+\sin C$ 必為有理數。

(2a-2) 同時，$\sin B=\sin C=\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}$ 且 $\sin A=\sin(\pi-2B)=\sin 2B=2\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\cdot\frac{2uv}{u^2+v^2}$ $=\frac{4uv\,(u^2-v^2)}{(u^2+v^2)^2}$，可得$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{4uv\,(u^2-v^2)}{(u^2+v^2)^2}+2\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}$ $=\frac{2\,(u^2-v^2)(u+v)^2}{(u^2+v^2)^2}$ 。

(2a-3) 例如取 $u=2$，$v=1$，得 3 邊長為 8, 5, 5 或 6, 5, 5 的等腰三角形，而其 3 內角的$\sin B=\sin C=\frac{3}{5}$，$\sin A=\frac{24}{25}$ ，$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{54}{25}$，圖形結構如下圖 4.。這種 $[a,b,b]$配置型的是邊長具整數分佈的第 1 類等腰三角形，其 3 邊長排列為 $[\ 4uv，u^2+v^2，u^2+v^2\ ]$ 或 $[\ 2(u^2-v^2)，u^2+v^2，u^2+v^2\ ]$。



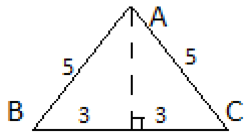


圖 4

[24, 13, 13]、[48, 25, 25]、[30, 17, 17]、[70, 37, 37]、…等都是此類等腰三角形。

(2b) 尋找 $[a,a,c]$型條件下的第 2 類等腰三角形：a與c互質。

(2b-1) 當 $a=b$，則 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)=(c)(c)(2a-c)(2a+c)$ $=c^2(2a-c)(2a+c)$ ，取 $(2a-c)(2a+c)=s^2\ \Rightarrow\ a^2=(s/2)^2+(c/2)^2$ 且 $c\neq s$，得$(a,\frac{s}{2},\frac{c}{2})$ 為畢氏三元數組，$a,\frac{s}{2},\frac{c}{2}$三者互質，所以 $a=u^2+v^2$ ，$s=4uv$或$2(u^2-v^2)$，$c=2(u^2-v^2)$或$4uv$，可得 3 邊長分別為 u^2+v^2，u^2+v^2，$2(u^2-v^2)$或$4uv$ 配置結構的等腰三角形，$u>v$，u與v皆為正整數且互質，而其 $\sin A+\sin B+\sin C$ 必為有理數。

(2b-2) 同時，$\sin B=\sin A=\frac{2uv}{u^2+v^2}$ 且 $\sin C=\sin(\pi-2B)=\sin 2B=2\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\cdot\frac{2uv}{u^2+v^2}$ $=\frac{4uv\,(u^2-v^2)}{(u^2+v^2)^2}$，可得 $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{4uv}{u^2+v^2}+\frac{4uv\,(u^2-v^2)}{(u^2+v^2)^2}=\frac{8u^3v}{(u^2+v^2)^2}$ 的有理數。

(2b-3) 例如：取 $u=3$，$v=2$，得 3 邊長為 13, 13, 10 的等腰三角形，而另一組以 13,

13, 24 配置的等腰三角形則屬於第 1 類等腰三角形。所以，這 $[a,a,c]$型搭配組合的是邊長為整數分佈的第 2 類等腰三角形，其 3 邊長依序由大而小排列為 $[\ u^2+v^2，u^2+v^2，2(u^2-v^2)\ ]$ 或 $[\ u^2+v^2，u^2+v^2，4uv\ ]$。[25, 25, 14]、[17, 17, 16]、[37, 37, 24]、[61, 61, 22]、⋯等都是此類等腰三角形。

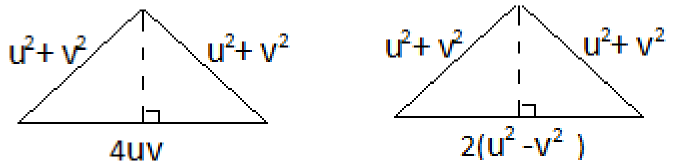


圖 5

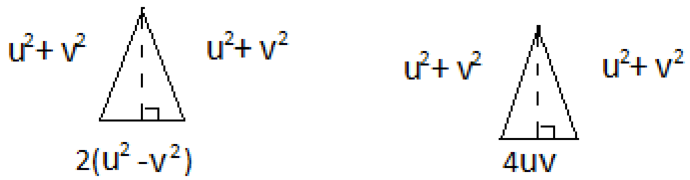


圖 6.

(2c) 圖 5.、6.分別表明第 1、2 類等腰三角形各邊長生成公式，每一個等腰三角形都恰由 2 個全等的畢氏數直角三角形左右對拼而成，是特定型等腰三角形。

第 1 類等腰三角形還需擴充為正整數 n 倍的邊長生成公式，其 3 邊長排列型態為 $[\ 4nuv，n(u^2+v^2)，n(u^2+v^2)\ ]$ 或 $[\ 2n(u^2-v^2)，n(u^2+v^2)，n(u^2+v^2)\ ]$。如若等腰邊長不限於整數，則還能推廣至有理數邊長生成公式，其 3 邊長排列型為 $[\ 4ruv，r(u^2+v^2)，r(u^2+v^2)\ ]$ 或 $[\ 2r(u^2-v^2)，r(u^2+v^2)，r(u^2+v^2)\ ]$，$r$ 為正有理數。

同理，第 2 類等腰三角形的擴充型正整數 n 倍的邊長生成公式為下列型式；$[\ n(u^2+v^2)，n(u^2+v^2)，2n(u^2-v^2)\ ]$或$[\ n(u^2+v^2)，n(u^2+v^2)，4nuv\ ]$。

甚至還能推廣至有理數邊長生成公式，其 3 邊長排列型為

$[\ r(u^2+v^2)，r(u^2+v^2)，2r(u^2-v^2)\ ]$或$[\ r(u^2+v^2)，r(u^2+v^2)，4ruv\ ]$，$r$ 為正有理數。

[3] 若 ΔABC 為 3 邊不等的三角形，即 $a>b>c$，或 $a>c>b$ 且 $b+c>a$ 。

引理 3.：若整數邊長 ΔABC 為 3 邊長 a,b,c 各不相等的三角形，當 $a^2=b^2+c^2$ ，則 $\sin A+\sin B+\sin C$ 必成為有理數。

[證明]：略。

[4] 若 ΔABC 為 3 邊不等且非直角的三角形，邊長為 a,b,c，$a\neq b\neq c$ 且 $a^2\neq b^2+c^2$ 。

(4a)　尋找各邊長皆不相等的非直角三角形，第 1 類型生成公式：

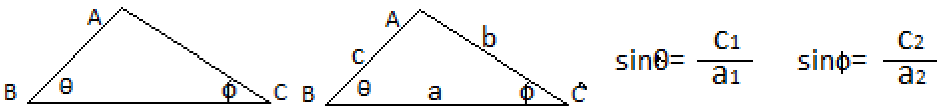


圖 7

(4a-1) 圖 7.為 3 邊不等的 ΔABC，若頂角 $\angle \mathrm{B}=\theta$，頂角 $\angle \mathrm{C}=\phi$，$\angle \mathrm{A}=\pi-(\theta+\phi)$，$\theta \neq \phi$，而假設 $\sin\theta=\dfrac{c_1}{a_1}$ 且 ${a_1}^2={b_1}^2+{c_1}^2$，又有 $\sin\phi=\dfrac{c_2}{a_2}$ 且 ${a_2}^2={b_2}^2+{c_2}^2$，$a_1<a_2$，a_1,b_1,c_1 與 a_2,b_2,c_2 皆為正整數。(a_1,b_1,c_1)與 (a_2,b_2,c_2)皆為畢氏三元數組。則得 $\sin A=\sin(\theta+\phi)=\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi=\dfrac{c_1b_2+b_1c_2}{a_1a_2}$，所以，得 ΔABC 的 3 邊長 $a:b:c=\sin A : \sin B : \sin C=\dfrac{c_1b_2+b_1c_2}{a_1a_2} : \dfrac{c_1}{a_1} : \dfrac{c_2}{a_2}=$ $(c_1b_2+b_1c_2) : c_1a_2 : c_2a_1$，再得到 3 邊長各自為 $a=k(c_1b_2+b_1c_2)$，$b=kc_1a_2$，$c=kc_2a_1$。

(4a-2) 將 a,b,c 三者同時一起代入 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)$ 式中，得

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)=k^4(c_1a_2+c_2a_1-c_1b_2-b_1c_2)(c_2a_1+c_1b_2+b_1c_2-c_1a_2)(c_1b_2+b_1c_2+c_1a_2-c_2a_1)(c_1b_2+b_1c_2+c_1a_2+c_2a_1)=k^4$$
$$[c_1(a_2-b_2)+c_2(a_1-b_1)][c_2(a_1+b_1)-c_1(a_2-b_2)][c_1(a_2+b_2)-c_2(a_1-b_1)]\cdot[c_1(a_2+b_2)+c_2(a_1+b_1)]$$
$$=k^4[{c_1}^2({a_2}^2-{b_2}^2)+c_1c_2(a_2-b_2)(a_1+b_1)\,{c_2}^2({a_1}^2-{b_1}^2)]$$
$$\cdot[c_1c_2(a_1+b_1)(a_2+b_2)-{c_2}^2({a_1}^2-{b_1}^2)-{c_1}^2({a_2}^2-{b_2}^2)+c_1c_2(a_1-b_1)(a_2-b_2)]$$
$$=k^4[2{c_1}^2{c_2}^2+2c_1c_2(a_1a_2-b_1b_2)][2c_1c_2(a_1a_2+b_1b_2)-2{c_1}^2{c_2}^2]$$
$$=4k^4{c_1}^2{c_2}^2[c_1c_2+a_1a_2-b_1b_2][a_1a_2+b_1b_2-c_1c_2]$$
$$=4k^4{c_1}^2{c_2}^2[(a_1a_2)^2-(b_1b_2-c_1c_2)^2]=4k^4{c_1}^2{c_2}^2[({b_1}^2+{c_1}^2)({b_2}^2+{c_2}^2)-(b_1b_2-c_1c_2)^2]$$
$$=4k^4{c_1}^2{c_2}^2(b_1c_2+c_1b_2)^2=[2k^2c_1c_2(b_1c_2+c_1b_2)]^2$$

成為完全平方式。

(4a-3) 再代入 (1)式知 $\sin A+\sin B+\sin C$ 必為有理數。因此，得知各邊長皆不相等的非直角三角形，要使得 $\sin A+\sin B+\sin C$ 必為有理數，其第 1 類型生成公式為；$[a=k(c_1b_2+b_1c_2)$，$b=kc_1a_2$，$c=kc_2a_1]$。k 為正整數。此處特別的三元數組 (a_1,b_1,c_1) 與 (a_2,b_2,c_2) 皆為畢氏三元數組。最後再將這個第 1 類型生成公式組 $[a,b,c]$ 直接代入方程式 (1)式中，計算後得到所求出的有理數值為 $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{(c_1b_2+b_1c_2)+c_1a_2+c_2a_1}{a_1a_2}$

例 1：取 (a_1,b_1,c_1)=(5, 4, 3)，(a_2,b_2,c_2)=(13, 12, 5)，則 $a=k(c_1b_2+b_1c_2)=56k$，$b=kc_1a_2=39k$，$c=kc_2a_1=25k$。得整數邊長為 $[56k, 39k, 25k]$ 的三角

形。而其有理數值為 $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{(c_1b_2+b_1c_2)+c_1a_2+c_2a_1}{a_1a_2}=\dfrac{24}{13}$

例 2： 取(a_1,b_1,c_1)=(13, 12, 5)，(a_2,b_2,c_2)=(17, 15, 8)，代入第 1 類型生成公式，得整數邊長 為 [$171k,85k,104k$] 的三角形。而其 $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{360}{221}$

(4b) 尋找各邊長皆不相等的非直角三角形，第 2 類型生成公式：

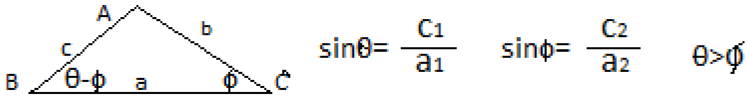


圖 8

(4b-1) 圖 8.，若頂角 $\angle B=\theta-\phi$，頂角 $\angle C=\phi$ ，$\angle A=\pi-\theta$，$\theta>\phi$ ，而假設 $\sin\theta=\dfrac{c_1}{a_1}$ 且 $a_1^{\ 2}=b_1^{\ 2}+c_1^{\ 2}$，又有 $\sin\phi=\dfrac{c_2}{a_2}$ 且 $a_2^{\ 2}=b_2^{\ 2}+c_2^{\ 2}$，$\dfrac{c_1}{b_1}>\dfrac{c_2}{b_2}$，$a_1,b_1,c_1$ 與 a_2,b_2,c_2 皆為正整數。(a_1,b_1,c_1)與 (a_2,b_2,c_2)皆為畢氏三元數組。則 $\sin A=\sin(\pi-\theta)=\dfrac{c_1}{a_1}$ ，$\sin B=\sin(\theta-\phi)=\sin\theta\cos\phi-\cos\theta\sin\phi=\dfrac{c_1b_2-b_1c_2}{a_1a_2}$ ，$\sin C=\dfrac{c_2}{a_2}$。得 ΔABC 的 3 邊長 $a:b:c=\sin A : \sin B : \sin C=\dfrac{c_1}{a_1}:\dfrac{c_1b_2-b_1c_2}{a_1a_2}:\dfrac{c_2}{a_2}=c_1a_2:(c_1b_2-b_1c_2):c_2a_1$，再得 3 邊長各自為 $a=kc_1a_2$ ，$b=k(c_1b_2-b_1c_2)$ ，$c=kc_2a_1$ 且 $c_1b_2>b_1c_2$。

(4b-2) 將 a,b,c 三者同時一起代入 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)$ 式中，仿效(4a-2)節的全部運算過程，詳細計算後必會得到下列完全平方式；$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)=4k^4c_1^{\ 2}c_2^{\ 2}(b_1c_2-c_1b_2)^2$

(4b-3) 再代入 (1)式知 $\sin A+\sin B+\sin C$ 必為有理數。證明出這第 2 類型生成公式組 [a,b,c] 為 [$a=kc_1a_2$ ，$b=k(c_1b_2-b_1c_2)$ ，$c=kc_2a_1$]。k 為正整數。這第 2 類型三角形的有理數值為 $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{(c_1b_2-b_1c_2)+c_1a_2+c_2a_1}{a_1a_2}$，且 $c_1b_2>b_1c_2$。此處的三元數組 (a_1,b_1,c_1) 與 (a_2,b_2,c_2) 皆為畢氏三元數組。

例 1：取 (a_1,b_1,c_1)=(5, 4, 3)，(a_2,b_2,c_2)=(13, 12, 5)，則 $a=kc_1a_2=39k$ ，$b=k(c_1b_2-b_1c_2)=16k$，$c=kc_2a_1=25k$ 。得整數邊長為 [$39k,16k,25k$] 的三

角形。而其有理數值為　$\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{(c_1b_2-b_1c_2)+c_1a_2+c_2a_1}{a_1a_2}=\dfrac{16}{13}$

例 2：取 (a_1,b_1,c_1)=(13, 12, 5)，(a_2,b_2,c_2)=(25, 24, 7)，代入第 2 類型生成公式，得整數邊長為 $[125k, 36k, 91k]$ 的三角形。而其　$\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{252}{325}$

例 3：取 (a_1,b_1,c_1)=(17, 15, 8)，(a_2,b_2,c_2)=(13, 12, 5)，代入第 2 類型生成公式，得整數邊長為 $[104k, 21k, 85k]$ 的三角形。而其　$\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{210}{221}$

(4c). 尋找各邊長皆不相等的非直角三角形，第 3 類型生成公式：

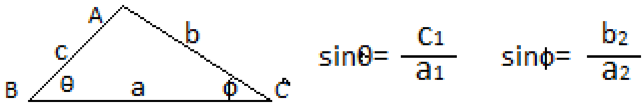


圖 9.

(4c-1) 圖 9. ，若頂角 $\angle B=\theta$，頂角 $\angle C=\phi$ ，$\angle A=\pi-(\theta+\phi)$，$\theta\neq\phi$ ，而假設 $\sin\theta=\dfrac{c_1}{a_1}$ 且 $a_1^{\,2}=b_1^{\,2}+c_1^{\,2}$，又另有 $\sin\phi=\dfrac{b_2}{a_2}$ 且 $a_2^{\,2}=b_2^{\,2}+c_2^{\,2}$，$a_1<a_2$，$a_1,b_1,c_1$ 與 a_2,b_2,c_2 皆為正整數。且 (a_1,b_1,c_1)與 (a_2,b_2,c_2)皆為畢氏三元數組。由對稱性，將 (a_1,b_1,c_1)與 (a_2,b_2,c_2)換成 (a_1,b_1,c_1)與 (a_2,c_2,b_2)可得出與第一類型具相同性質，但不同結果，則得

$\sin A=\sin(\theta+\phi)=\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi=\dfrac{c_1c_2+b_1b_2}{a_1a_2}$ ，所以，可得 ΔABC 的 3 邊長 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\dfrac{c_1c_2+b_1b_2}{a_1a_2}:\dfrac{c_1}{a_1}:\dfrac{b_2}{a_2}=(c_1c_2+b_1b_2):c_1a_2:b_2a_1$，得 $a=k(c_1c_2+b_1b_2)$，$b=kc_1a_2$，$c=kb_2a_1$ 。

(4c-2) 將 a,b,c 三者同時一起代入 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)$ 式中，再仿效(4a-2)節的全部運算過程，詳細計算後必會得到下列完全平方式；

$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)=4k^4c_1^{\,2}b_2^{\,2}(c_1c_2+b_1b_2)^2$

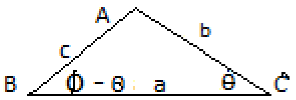
(4c-3) 再代入 (1)式知　$\sin A+\sin B+\sin C$ 必為有理數。證明出這第 3 類型生成公式組 $[a,b,c]$ 為 $[a=k(c_1c_2+b_1b_2)$，$b=kc_1a_2$，$c=kb_2a_1]$。k 為正整數。這第 3 類型三角形的有理數值為　$\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{(c_1c_2+b_1b_2)+c_1a_2+b_2a_1}{a_1a_2}$，此處的三元數組 (a_1,b_1,c_1) 與 (a_2,b_2,c_2) 皆為畢氏三元數組。

例 1：取 (a_1,b_1,c_1)=(5, 4, 3)，(a_2,b_2,c_2)=(13, 12, 5)，則 $a=k(c_1c_2+b_1b_2)$=63k，$b=kc_1a_2$=39k，$c=kb_2a_1$=60k。得整數邊長為 [63k ,39k ,60k] 的三角形，化簡得 [21k ,13k ,20k] 的三角形。此情況的證明顯示了與前述相同條件(4a).節例 1.所規範出的結果恰好完全相異，而再計算其有理數值為 $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{(c_1c_2+b_1b_2)+c_1a_2+b_2a_1}{a_1a_2}=\dfrac{162}{65}<\dfrac{5}{2}<\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$。

例 2：取(a_1,b_1,c_1)=(5, 4, 3)，(a_2,b_2,c_2)=(41, 40, 9)，則 $a=k(c_1c_2+b_1b_2)$=187k，$b=kc_1a_2$=123k，$c=kb_2a_1$=200k。得整數邊長為 [187k ,123k ,200k] 的三角形。而其有理數值為 $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{(c_1c_2+b_1b_2)+c_1a_2+b_2a_1}{a_1a_2}=\dfrac{102}{41}$

例 3：取(a_1,b_1,c_1)=(13, 12, 5)，(a_2,b_2,c_2)=(25, 24, 7)，代入第 3 類型生成公式，得整數邊長為[323k ,125k ,312k] 的三角形。而其 $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{152}{65}$

(4d) 尋找各邊長皆不相等的非直角三角形，第 4 類型生成公式：



$\sin\theta=\dfrac{c_1}{a_1}$　$\sin\phi=\dfrac{b_2}{a_2}$　$\phi>\theta$

圖 10.

(4d-1) 圖 10.，若頂角 $\angle B=\phi-\theta$，頂角 $\angle C=\theta$，$\angle A=\pi-\phi$，$\phi>\theta$，而假設 $\sin\theta=\dfrac{c_1}{a_1}$ 且 $a_1^2=b_1^2+c_1^2$，又有 $\sin\phi=\dfrac{b_2}{a_2}$ 且 $a_2^2=b_2^2+c_2^2$，(a_1,b_1,c_1)與 (a_2,b_2,c_2)皆為畢氏三元數組。則 $\sin A=\sin(\pi-\phi)=\sin\phi=\dfrac{b_2}{a_2}$，$\sin B=\sin(\phi-\theta)=\sin\phi\cos\theta-\cos\phi\sin\theta=\dfrac{b_1b_2-c_1c_2}{a_1a_2}$，$\sin C=\dfrac{c_1}{a_1}$。所以，可得 ΔABC 的 3 邊長 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\dfrac{b_2}{a_2}:\dfrac{b_1b_2-c_1c_2}{a_1a_2}:\dfrac{c_1}{a_1}=b_2a_1:(b_1b_2-c_1c_2):c_1a_2$，再得 3 邊長各自為 $a=kb_2a_1$，$b=k(b_1b_2-c_1c_2)$，$c=kc_1a_2$ 且 $b_1b_2>c_1c_2$。

(4d-2) 將 a,b,c 三者同時一起代入 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)$ 式中，再仿效(4a-2)節的全部運算過程，詳細計算後必會得到下列完全平方式；$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)=4k^4c_1^2b_2^2(b_1b_2-c_1c_2)^2$

(4d-3) 再代入 (1)式知 $\sin A+\sin B+\sin C$ 必為有理數。證明出這第 4 類型生成公式組 [a,b,c] 為 [$a=kb_2a_1$，$b=k(b_1b_2-c_1c_2)$，$c=kc_1a_2$]。k 為正整數。

這第 4 類型三角形的有理數值為 $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{(b_1b_2-c_1c_2)+c_1a_2+b_2a_1}{a_1a_2}$，且 $b_1b_2>c_1c_2$。此處的三元數組（a_1,b_1,c_1）與（a_2,b_2,c_2）皆為畢氏三元數組。

例 1：取 (a_1,b_1,c_1)=(13, 12, 5)，(a_2,b_2,c_2)=(29, 21, 20)，則 $a=kb_2a_1=273k$，$b=k(b_1b_2-c_1c_2)=152k$，$c=kc_1a_2=145k$。得整數邊長為[$273k$,$152k$,$145k$]的三角形。而其有理數值為 $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{(b_1b_2-c_1c_2)+c_1a_2+b_2a_1}{a_1a_2}=\dfrac{570}{377}$

例 2：取 (a_1,b_1,c_1)=(17, 15, 8)，(a_2,b_2,c_2)=(37, 35, 12)，代入第 4 類型生成公式，得整數邊長為[$595k$,$429k$,$296k$]的三角形。而其 $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{1320}{629}$

例 3：取 (a_1,b_1,c_1)=(61, 60, 11)，(a_2,b_2,c_2)=(17, 15, 8)，代入第 4 類型生成公式，得整數邊長為[$915k$,$812k$,$187k$]的三角形。而其 $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{1914}{1037}$

例 4：若取(a_1,b_1,c_1)=(17, 15, 8)，(a_2,b_2,c_2)=(61, 60, 11)，代入第 4 類型生成公式，得整數邊長為[$1020k$,$812k$,$488k$]的三角形，其 $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{2320}{1037}$

※將[$1020k$,$812k$,$488k$]再化簡成 [$255k$,$203k$,$122k$] 的新三角形。化簡後新三角形有理數仍為 $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{2320}{1037}$ 。當[a , b , c]有公因數就化簡。

C. 整數邊長 ΔABC 的各邊長為 a , b , c ，$a\neq b\neq c$ 且 $a^2\neq b^2+c^2$，$b^2\neq c^2+a^2$，$c^2\neq a^2+b^2$，當其 $\sin A+\sin B+\sin C$ 恰為有理數時，探討此非直角三角形的 3 整數邊長其另類生成公式型態，情形如下： 首先再提出下列引理 4.性質 ；

引理 4.：給定 3 個正整數 x、y 與 w，當 $x\cdot y=w^2$ 且 $x>y>1$，則 $x=k^2y$ ，k 為大於 1 的正整數或最簡約有理數。

[證明]：

(a) 由 $\dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{w^2}{y}\right)\div y=\dfrac{w^2}{y^2}>1$ ，並將 $\dfrac{w}{y}=k$ 約去公因數，化簡成 $\dfrac{q}{p}$。當然，化簡後，會有 $p=1$ 的情況出現或 q 與 p 為互質的正整數等 2 種情形。

(b) 由(a)得 $\dfrac{x}{y}=k^2>1$，故 $x=k^2y$ ，k 為大於 1 的正整數或最簡約有理數。

[C-1] 由 (1)式知，$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)$ 必為完全平方數，可得其中一個組合為 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)$ = $[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]$ 。同時，因為 $(c+a-b)(a+b-c)-(b+c-a)(a+b+c)=[a^2-(b-c)^2]-[(b+c)^2-a^2]=2a^2-2b^2-2c^2=h\neq 0$ ，可能的情形是： $h>0$ 或 $h<0$ ，詳情分別敘述如下；

[1] 考慮 $[a^2-(b-c)^2]-[(b+c)^2-a^2]=h>0$ 情形，$[a^2-(b-c)^2]>[(b+c)^2-a^2]$；因 $(b+c-a)$、$(c+a-b)$、$(a+b-c)$、$(a+b+c)$ 皆各為正整數，得 $[a^2-(b-c)^2]$ 與 $[(b+c)^2-a^2]$ 也各為正整數且兩者相乘積為完全平方數，今應用引理 4.的性質而取定 $[a^2-(b-c)^2]=k^2[(b+c)^2-a^2]$ ，$k>1$，k 為正整數或最簡約有理數。現在將等號兩側各自展開，得 $a^2-b^2+2bc-c^2=k^2[b^2+2bc+c^2-a^2] \Rightarrow (k^2+1)a^2=(k^2+1)b^2+(k^2+1)c^2+2(k^2-1)bc \Rightarrow a^2=b^2+c^2+\frac{k^2-1}{k^2+1}\cdot 2bc \Rightarrow a^2=b^2+c^2+\left(1-\frac{2}{k^2+1}\right)\cdot 2bc$

$\Rightarrow a^2=(b+c)^2-\frac{4bc}{k^2+1}$ 。 a,b,c 未必要互質。接著，透過觀察並作各種實際演算試驗而歸納出延續推理的關鍵要素；再設定 $b=(k^2+1)\cdot m$ ，則 $a^2=[(k^2+1)m+c]^2-4mc$ $=(k^2+1)^2m^2+2(k^2+1)mc+c^2-4mc=4k^2m^2+[(k^2-1)m+c]^2 \Rightarrow a^2=(2km)^2+[(k^2-1)m+c]^2$ ，m為正整數，此刻，可清楚察覺意識到 a、$2km$、$[(k^2-1)m+c]$ 三者恰為畢氏三元數，而且 a、$2km$、$[(k^2-1)m+c]$ 三者也是未必要互質。設此三數的最大公因數為 r，則存在正整數 u,v，u 與 v 互質 且 $u>v$。使得 (a) $a=r(u^2+v^2)$ ，$2km=2uv\,r$，$[(k^2-1)m+c]=r(u^2-v^2)$ ；則 $m=\frac{uv}{k}r \Rightarrow$ 得 $b=(k^2+1)\cdot m=\frac{k^2+1}{k}uv\,r$ 且 $c=r(u^2-v^2)-(k^2-1)m=r(u^2-v^2)-\frac{k^2-1}{k}uv\,r$ ，因而得到第 1 組 $[a,b,c]$ 生成公式：

(i) $a=r(u^2+v^2)$ ，$b=\frac{k^2+1}{k}uv\cdot r$ ， $c=r(u^2-v^2)-\frac{k^2-1}{k}uv\,r$ ，$u>v$，u 與 v 皆為正整數，$k>1$，k 為正整數或最簡約有理數。 此處注意：因 b 與 c 皆為正整數，故若 k 為正整數時，$uv\cdot r=nk$ ，n 為正整數且需要遵守 $a\neq b\neq c$ 。若 k 為最簡約有理數時，$k=\frac{q}{p}$ ，則 $uv\cdot r=npq$ ，n 為正整數且也需要遵守 $a\neq b\neq c$ 。

例 1： 取 $r=1$，$k=3/2$，得 (i) $a=u^2+v^2$ ，$b=\frac{13}{6}uv$ ， $c=u^2-v^2-\frac{5}{6}uv$

(ii) $a=u^2+v^2$ ， $b=\frac{13}{12}(u^2-v^2)$ ， $c=2uv-\frac{5}{12}(u^2-v^2)$ ，

取 (u,v)=(6, 1)，由(i) 得 $[a,b,c]$=[37,13 ,30] ，$\sin A+\sin B+\sin C=960/481$

(u,v)=(4, 2)，由(ii) 得 $[a,b,c]$=[20,13 ,11] ，$\sin A+\sin B+\sin C=132/65$

(ii)　$a = u^2 + v^2$，　$b = \dfrac{13}{12}(u^2 - v^2)$，　$c = 2uv - \dfrac{5}{12}(u^2 - v^2)$，

取 (u, v)=(6, 1)，由(i) 得 $[a, b, c]$=[37,13 ,30]，$\sin A + \sin B + \sin C = 960/481$

　(u, v)=(4, 2)，由(ii) 得 $[a, b, c]$=[20,13 ,11]，$\sin A + \sin B + \sin C = 132/65$

例 2：取 $r = 1$，$k = 4/3$，得　(i)　$a = u^2 + v^2$，$b = \dfrac{25}{12}uv$，　$c = u^2 - v^2 - \dfrac{7}{12}uv$

(ii)　$a = u^2 + v^2$，　$b = \dfrac{25}{24}(u^2 - v^2)$，　$c = 2uv - \dfrac{7}{24}(u^2 - v^2)$

取 (u, v)=(12, 1)，由(i) 得 $[a, b, c]$=[145,25 ,136]，$\sin A + \sin B + \sin C = 7344/3625$

　(u, v)=(5, 1)，由(ii) 得 $[a, b, c]$=[26,25 ,3]，$\sin A + \sin B + \sin C = 648/325$

例 3：取 $r = 1$，$k = 2$，得　(i)　$a = u^2 + v^2$，$b = \dfrac{5}{2}uv$，　$c = u^2 - v^2 - \dfrac{3}{2}uv$

(ii)　$a = u^2 + v^2$，　$b = \dfrac{5}{4}(u^2 - v^2)$，　$c = 2uv - \dfrac{3}{4}(u^2 - v^2)$，

取 (u, v)=(4, 1)，由(i) 得 $[a, b, c]$=[17,10 ,9]，$\sin A + \sin B + \sin C = 144/85$

　(u, v)=(4, 2)，由(ii) 得 $[a, b, c]$=[20,15 ,7]，$\sin A + \sin B + \sin C = 42/25$

(u, v)=(5, 2)，由(i) 得 $[a, b, c]$=[29,25 ,6]，$\sin A + \sin B + \sin C = 48/29$

(u, v)=(6, 4)，由(ii) 得 $[a, b, c]$=[52,25 ,33]，$\sin A + \sin B + \sin C = 22/13$

(u, v)=(6, 1)，由(i) 得 $[a, b, c]$=[37,15 ,26]，$\sin A + \sin B + \sin C = 312/185$

⋯ ⋯，如此，可持續尋覓出更多的相異邊長$[a, b, c]$組，而其中前 3 組；[17,10 ,9]、[20,15 ,7]、[29,25 ,6]等 3 個三角形其各自的周長與其面積皆有相等整數值。

例 4：取 $r = 1$，$k = 3$，得　(i)　$a = u^2 + v^2$，$b = \dfrac{10}{3}uv$，　$c = u^2 - v^2 - \dfrac{8}{3}uv$

(ii)　$a = u^2 + v^2$，　$b = \dfrac{5}{3}(u^2 - v^2)$，　$c = 2uv - \dfrac{4}{3}(u^2 - v^2)$，　$u \ge k + 2 \ge 5$

取 (u, v)=(5, 4)，由(ii) 得 $[a, b, c]$=[41,15 ,28]，$\sin A + \sin B + \sin C = 252/205$

　(u, v)=(6, 1)，由(i) 得 $[a, b, c]$=[37,20 ,19]，$\sin A + \sin B + \sin C = 228/185$

(u, v)=(7, 4)，由(ii) 得 $[a, b, c]$=[65,55 ,12]，$\sin A + \sin B + \sin C = 396/325$

(u, v)=(8, 5)，由(ii) 得 $[a, b, c]$=[89,65 ,28]，$\sin A + \sin B + \sin C = 546/445$

(u, v)=(8, 7)，由(ii) 得 $[a, b, c]$=[113,25 ,92]，$\sin A + \sin B + \sin C = 69/904$

(u, v)=(9, 1)，由(i) 得 $[a, b, c]$=[82,30 ,56]，$\sin A + \sin B + \sin C = 252/205$

(u, v)=(9, 2)，由(i) 得 $[a, b, c]$=[85,60 ,29]，$\sin A + \sin B + \sin C = 522/425$

⋯ ⋯ ⋯

持續取 $k = 4$、5、⋯ 或 5/3、5/4、⋯等可永續生成更多的相異邊長$[a, b, c]$組。

[2] 考慮 $[a^2-(b-c)^2]-[(b+c)^2-a^2]=h<0$ 情形，$[a^2-(b-c)^2]<[(b+c)^2-a^2]$；設定 $k^2[a^2-(b-c)^2]=[(b+c)^2-a^2]$，$k$ 為大於 1 的正整數或最簡約有理數。展開運算後，得；$a^2=(b-c)^2+\dfrac{4bc}{k^2+1}$ 。同樣地，設定 $b=(k^2+1)\cdot m$ ，再代入運算，整理後，得 $a^2=(2km)^2+[(k^2-1)m-c]^2$ ，此刻，再清楚察覺意識到 a、$2km$、$[(k^2-1)m-c]$ 三者恰為畢氏三元數，於是；令 r 為正整數。

(a) 令 $a=r(u^2+v^2)$ ，$2km=2uv\,r$，$[(k^2-1)m-c]=r(u^2-v^2)$ ；則 $m=\dfrac{uv}{k}r$ $\Rightarrow$ 得 $b=(k^2+1)\cdot m=\dfrac{k^2+1}{k}uv\,r$ 且 $c=(k^2-1)m-r(u^2-v^2)=\dfrac{k^2-1}{k}uv\,r-r\cdot(u^2-v^2)$ ，因而得到第 3 組 $[a,b,c]$ 生成公式：

(iii) $a=r(u^2+v^2)$ ， $b=\dfrac{k^2+1}{k}uv\,r$ ， $c=r[\dfrac{k^2-1}{k}uv-u^2+v^2]$ ，$u>v$，u 與 v 皆為正整數且 k 為大於 1 的正整數或最簡約有理數。 此處注意：k 為正整數時，$r\,uv=nk$，n 為正整數且需要遵守 $a\neq b\neq c$ 。 k 為最簡約有理數時，$k=\dfrac{q}{p}$，則 $r\,uv=npq$，n 為正整數且也需要遵守 $a\neq b\neq c$ 。

(b) 再令 $a=r(u^2+v^2)$ ， $2km=r(u^2-v^2)$ ， $[(k^2-1)m-c]=2uv\,r$ ；則 $m=\dfrac{u^2-v^2}{2k}r$ $\Rightarrow$ 得 $b=\dfrac{k^2+1}{2k}(u^2-v^2)\cdot r$ ， $c=r[\dfrac{k^2-1}{2k}(u^2-v^2)-2uv]$ ，得第 4 組 $[a,b,c]$生成公式：

(iv) $a=r(u^2+v^2)$ ，$b=\dfrac{k^2+1}{2k}(u^2-v^2)\cdot r$ ， $c=r[\dfrac{k^2-1}{2k}(u^2-v^2)-2uv]$ ，$u>v$，u 與 v 皆為正整數且 k 為大於 1 的正整數或最簡約有理數。此處注意：k 為正整數時，$(u^2-v^2)\cdot r=2nk$，n 為正整數且需要遵守 $a\neq b\neq c$ 。k 為最簡約有理數時，$k=\dfrac{q}{p}$，則 $(u^2-v^2)\cdot r=2npq$，n 為正整數且也需要遵守 $a\neq b\neq c$ 。

例 7：取 $r=1$，$k=2$，得 (iii) $a=u^2+v^2$ ，$b=\dfrac{5}{2}uv$ ， $c=\dfrac{3}{2}uv-u^2+v^2$

(iv) $a=u^2+v^2$ ， $b=\dfrac{5}{4}(u^2-v^2)$ ， $c=\dfrac{3}{4}(u^2-v^2)-2uv$ ， $u\geq k+1\geq 3$

取 $(u,v)=(3,2)$，由(iii) 得 $[a,b,c]=[13,15,4]$ ， $\sin A+\sin B+\sin C=384/195$

$(u,v)=(4,3)$，由(iii) 得 $[a,b,c]=[25,30,11]$ ， $\sin A+\sin B+\sin C=264/125$

(u,v)=(5, 4)，由(iii) 得 $[a,b,c]$=[41,50 ,21] ，$\sin A+\sin B+\sin C=448/205$

由(iii)，(u,v)=(6, 5)得 $[a,b,c]$=[61,75 ,34] ，$\sin A+\sin B+\sin C=136/61$

(u,v)=(7, 4)得 $[a,b,c]$=[65,70 ,9] ，$\sin A+\sin B+\sin C=576/325$

(u,v)=(7, 6)得 $[a,b,c]$=[85,105 ,50]，約去公因數，得$[a,b,c]$=[17,21 ,10]。其 $\sin A+\sin B+\sin C=192/85$ 。

(u,v)=(8, 5)得 $[a,b,c]$=[89,100 ,21] ，$\sin A+\sin B+\sin C=168/89$ 。

由(iv)，(u,v)=(5, 1)得$[a,b,c]$=[26,30 ,8]，約去公因數，得$[a,b,c]$=[13,15 ,4]。其 $\sin A+\sin B+\sin C=384/195$ 。 略去許多$[a,b,c]$有公因數者，而當 (u,v)=(8, 2) 得 $[a,b,c]$=[68,75 ,13]。其 $\sin A+\sin B+\sin C=156/85$ 。

… … …

例 8： 取 $r=1$，$k=3$，得 (iii) $a=u^2+v^2$ ，$b=\dfrac{10}{3}uv$ ， $c=\dfrac{8}{3}uv-u^2+v^2$

(iv) $a=u^2+v^2$ ， $b=\dfrac{5}{3}(u^2-v^2)$ ， $c=\dfrac{4}{3}(u^2-v^2)-2uv$ ， $u\ge k=3$

取 (u,v)=(3, 2)，由(iii) 得 $[a,b,c]$=[13,20 ,11] ，$\sin A+\sin B+\sin C=132/65$

(u,v)=(5, 3)得 $[a,b,c]$=[34,50 ,24]，約去公因數，得 [17,25 ,12]。而其 $\sin A+\sin B+\sin C=162/85$

(u,v)=(6, 3)得 $[a,b,c]$=[45,60 ,21]，約去公因數，得 [15,20 ,7]。而其 $\sin A+\sin B+\sin C=42/25$

(u,v)=(6, 5)得 $[a,b,c]$=[61,100 ,69] ，$\sin A+\sin B+\sin C=138/61$

(u,v)=(7, 6)得 $[a,b,c]$=[85,140 ,99] ，$\sin A+\sin B+\sin C=972/425$

(u,v)=(7, 3)得 $[a,b,c]$=[58,70 ,16]。約去公因數，得 [29,35 ,8]。

由(iv)，(u,v)=(4, 1)得$[a,b,c]$=[17,25 ,12] ，$\sin A+\sin B+\sin C=162/85$

(u,v)=(5, 2)得$[a,b,c]$=[29,35 ,8] ，$\sin A+\sin B+\sin C=216/145$

(u,v)=(7,2)得$[a,b,c]$=[53,75 ,32] ，$\sin A+\sin B+\sin C=288/265$

(u,v)=(8, 1)得$[a,b,c]$=[65,105 ,68] ，$\sin A+\sin B+\sin C=714/325$

(u,v)=(10, 1)得$[a,b,c]$=[101,165 ,112] ，$\sin A+\sin B+\sin C=1134/505$

(u,v)=(11,4)得$[a,b,c]$=[137,175 ,52] ，$\sin A+\sin B+\sin C=1092/685$

… … …

持續取 $k=4$、5、… 或 5/3、5/4、…等可永續生成更多的相異邊長$[a,b,c]$組。

[C-2] 另外，$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)$ 還可組合成下列 2 種乘積式：

$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)=[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]$ 與 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)=[(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2]$ 等 2 不同型式。

(3a) 考慮 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c) = [(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]$ 情形；
設定 $[(a+b)^2-c^2] = k^2[c^2-(a-b)^2]$ ，k 為大於 1 的正整數或最簡約有理數。仿效[C-1]內 [1]、[2]節的展開推演流程，最後得 $a=(k^2+1)\cdot m$ 與 $c^2=(2km)^2+[(k^2-1)m-b]^2$，此結果恰與[2]節的 $b=(k^2+1)\cdot m$ 與 $a^2=(2km)^2+[(k^2-1)m-c]^2$ 情形完全相似，所以，演算出來的$[a,b,c]$邊長組結果也都相同，只是a,b,c位置變換而已。
(3b) 考慮 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c) = [(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2]$ 情形；
設定 $[(a+c)^2-b^2] = k^2[b^2-(a-c)^2]$ ，k 為大於 1 的正整數或最簡約有理數。 同樣的推演流程，得到 $c=(k^2+1)\cdot m$ 與$b^2=(2km)^2+[(k^2-1)m-a]^2$ ，情形又完全相似，所以，演算出來的$[a,b,c]$邊長組結果也都相同，只是a,b,c位置變換而已。
理論上，因 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)$ 乘積式呈現出關於 a,b,c三者輪換式對稱，所以，推演 3 種情形必會得到相同結果，而事實上也是如此。

綜合以上的分析推理歸納出： 對整數邊長 ΔABC 言，無論是等腰三角形、畢氏數直角三角形或各邊長皆不相等的非直角三角形，欲使其 $\sin A+\sin B+\sin C$ 的數值皆為有理數，關鍵因素就在於；[M1] 其各任意頂角角度都必定是形如畢氏三元數直角三角形頂角角度或是這類畢氏數頂角角度相加、相減關聯的線性組合。如主文 B.標題內的[2]、[3]、[4]節內容解說說明，詳見於第 3 ~ 8 頁中。 [M2]各邊長皆不相等的非直角三角形其 3 整數邊長 a,b,c 必呈現下列等式關係； $[a^2-(b-c)^2] = k^2[(b+c)^2-a^2]$ 或 $k^2[a^2-(b-c)^2] = [(b+c)^2-a^2]$，$k$ 為大於 1 的正整數或最簡約有理數。由這等因素再推演出各邊長 a,b,c 的生成公式。

肆、結論

[1] 由 $\sin A+\sin B+\sin C = \dfrac{(a+b+c)}{2abc}\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)}$ 的關係式結構知；只要將 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)$ 寫成完全平方式就能推理演繹出各邊長 a,b,c 的生成公式並找到其各組正確身份數值，再一舉計算出 $\sin A+\sin B+\sin C$ 的有理數值。

[2] 應用各組 $[a,b,c]$生成公式而計算出其整數值時，常常會得到a,b,c三者皆有公因數情況，只要約去公因數就可得到各組 $[a,b,c]$的最簡約數，亦即 a,b,c三者互質的簡約數。而由每組簡約數形成的倍數組其 $\sin A+\sin B+\sin C$的有理數值皆完全相等。目前尚未找到不同的最簡約數組有相等的$\sin A+\sin B+\sin C$值。

[3] 要將 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)$ 寫成完全平方式，首先須檢視各乘積項

之間的倍數關係，由倍數關係歸納出乘積項的等式關聯。在數值分析中找到關鍵因素的要領之一是窮舉法；此處先借用畢氏三元數的代入，再透過觀察並作各種實際演算試驗而歸納出乘積項之間的等式相關性，始能確認推理的模式，進一步推論而得證出合理正確的生成公式。

[4] 對整數邊長 ΔABC 言，$\cos A+\cos B+\cos C$ 的值必為有理數，此由餘弦定理公式即知悉。可見其與 $\sin A+\sin B+\sin C$ 的差異頗大。探討之後，更體認到下列恆等式的相關連部份項的類同性質； $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ 與 $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ ，則使 $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ 成為有理數值的整數邊長 ΔABC 也同時被尋找出來了。至於 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ 成為有理數值，對整數邊長 ΔABC 言則是必然。

由於 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)$ 乘積式呈現出關於 a,b,c 三者輪換式對稱，意指同步將式中的 a 換成 b、將 b 換成 c、將 c 換成 a、乘積式仍維持不變的性質。應用輪換式對稱性可將複雜問題簡化處理而得到相同的效果。

三角函數在研究三角形和圓等幾何形狀的性質時具有重大效果，特別是用於計算三角形中未知長度的邊和未知的角度，在導航、工程學、半導體奈米製程、導引飛彈等精密設計以及物理學、人造衛星科學、測量學方面都有廣泛的用途。

參考文獻

蔡聰明 (2012)。**數學的發現趣談**。三民書局。

蔡聰明 (2010) 。**數學拾貝**。三民書局。

黃文達 (2009)。**勾股三元數組**。台灣數學博物館。2009 年 9 月 7 日，取自：http://museum.math.ntnu.edu.tw/view.php?menuID=55

.