「幾個恆等式的組合證明」的迴響

許閎揚

彰化縣立彰化藝術高中

壹、前言

在科學教育月刊第 354 期[1]中，許介彥老師介紹了一些恆等式的組合證明，對這些等式我們給予代數的證明並對其中的一些等式做延伸。此外，對於文章[1]提供給讀者的部分習題，我們除了提供證明給讀者參考外，也做了一些延伸。

貳、恆等式的代數證明與延伸

恆等式 **1[1]**： $\sum_{k\geq 0} C_{2k}^{n} = 2^{n-1}$ ， $n \geq 1$ 。

證明：

利用二項式定理，

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^k = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \cdots + C_n^n x^n \qquad (2.1.1)$$

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_k^n x^k = C_0^n - C_1^n x + C_2^n x^2 + \cdots + (-1)^n C_n^n x^n \qquad (2.1.2)$$

將(2.1.1)(2.1.2)式相加，得

$$(1+x)^n + (1-x)^n = 2\sum_{k\geq 0} C_{2k}^n x^{2k} \qquad (2.1.3)$$

將 $x=1$ 代入(2.1.3)式，得

$2^n = 2\sum_{k\geq 0} C_{2k}^n$ ，即

$\sum_{k\geq 0} C_{2k}^n = 2^{n-1}$ ，得證。

我們可以把證明恆等式 1 的想法延伸，得以下恆等式 2。

恆等式 2: $\sum_{k\geq 0} C_{3k}^n = \begin{cases} \dfrac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}, n \equiv 1 \text{ or } n \equiv 2 \pmod 3 \\ \dfrac{2^n + (-1)^n \cdot 2}{3}, n \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$ 。

證明：

利用二項式定理，

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_k^n x^k=C_0^n+C_1^n x+C_2^n x^2+\cdots+C_n^n x^n \qquad (2.2.1)$$

將 $x=1$ 代入(2.2.1)式，得

$$2^n=\sum_{k=0}^{n}C_k^n=C_0^n+C_1^n+C_2^n+\cdots+C_n^n \qquad (2.2.2)$$

令ω是$1+x+x^2=0$ 的一根，得

$$1+\omega+\omega^2=0，\quad \omega^3=1， \qquad (2.2.3)$$

利用(2.2.3)，得

當 $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,3)$ ，$\omega^n+\omega^{2n}=\omega+\omega^2=-1$ 。 (2.2.4)

當 $n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,3)$ ，$\omega^n+\omega^{2n}=\omega^2+\omega=-1$ 。

當 $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,3)$ ，$\omega^n+\omega^{2n}=1+1=2$ 。

將ω與ω^2分別代入(2.2.1)式，得

$$(1+\omega)^n=\sum_{k=0}^{n}C_k^n\omega^k=C_0^n+C_1^n\omega+C_2^n\omega^2+\cdots+C_n^n\omega^n \qquad (2.2.5)$$

$$(1+\omega^2)^n=\sum_{k=0}^{n}C_k^n\omega^{2k}=C_0^n+C_1^n\omega^2+C_2^n\omega^4+\cdots+C_n^n\omega^{2n} \qquad (2.2.6)$$

將(2.2.2)，(2.2.5)，(2.2.6)等三式相加，並利用(2.2.4)得

$$2^n+(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n=3\sum_{k\ge 0}C_{3k}^n \ ，$$

兩邊同除 3，得

$$\frac{2^n+(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n}{3}=\sum_{k\ge 0}C_{3k}^n \ ，$$

利用(2.2.3)，得

$$\frac{2^n+(-1)^n\omega^{2n}+(-1)^n\omega^n}{3}=\sum_{k\ge 0}C_{3k}^n \ ，$$

整理得

$$\frac{2^n+(-1)^n\left(\omega^n+\omega^{2n}\right)}{3}=\sum_{k\ge 0}C_{3k}^n$$

利用 (2.2.4)，得

$$\sum_{k\geq 0} C_{3k}^{n} = \begin{cases} \dfrac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}, n\equiv 1 \text{ or } n\equiv 2 \pmod 3 \\ \dfrac{2^n+(-1)^n\cdot 2}{3}, n\equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$$

得證。

恆等式 3[1]: $kC_k^n = nC_{k-1}^{n-1}$，$n\geq k\geq 1$。

方法 1： $kC_k^n = k\cdot\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$=\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$=n\cdot C_{k-1}^{n-1}$， 得證。

方法 2：利用二項式定理，

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^k = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \cdots + C_n^n x^n \qquad (2.3.1)$$

將(2.3.1)式 等號兩邊對 x 微分，得

$$n(1+x)^{n-1} = C_1^n + 2C_2^n x + 3C_3^n x^2 + \cdots + nC_n^n x^{n-1} \qquad (2.3.2)$$

比較(2.3.2)式等號兩邊 x^{k-1} 項的係數，左邊為 nC_{k-1}^{n-1}，右邊為 kC_k^n，故 $kC_k^n = nC_{k-1}^{n-1}$。

恆等式 4[1]: $\sum_{k=0}^{n} kC_k^n = n2^{n-1}$, $n\geq 1$。

證明：利用(2.3.2)，

$$n(1+x)^{n-1} = C_1^n + 2C_2^n x + 3C_3^n x^2 + \cdots + nC_n^n x^{n-1} \qquad (2.3.2)$$

將 $x=1$ 代入(2.3.2)式，得

$$n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kC_k^n \text{，}$$

得證。

恆等式 4 是利用逐項微分 $(1+x)^n$ 的展開式得到，若考慮逐項積分 $(1+x)^n$ 的展開式，我們可以得到恆等式 5。

恆等式 5: $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_k^n}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1},\ n \geq 1$ 。

證明：利用二項式定理，

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^k = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \cdots + C_n^n x^n \qquad (2.5.1)$$

將(2.5.1)式等號兩邊積分，得

$$\int_0^x (1+t)^n\, dt = \int_0^x (1 + C_1^n t + C_2^n t^2 + \cdots + C_n^n t^n)dt \text{ ，}$$

等號右邊逐項積分，得

$$\frac{1}{n+1}(1+t)^{n+1}\Big|_0^x = t\Big|_0^x + \frac{1}{2}C_1^n t^2\Big|_0^x + \frac{1}{3}C_2^n t^3\Big|_0^x + \cdots + \frac{1}{n+1}C_n^n t^{n+1}\Big|_0^x \text{ ，得}$$

$$\frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1} = x + \frac{1}{2}C_1^n x^2 + \frac{1}{3}C_2^n x^3 + \cdots + \frac{1}{n+1}C_n^n x^{n+1} \text{ ，}$$

將 $x=1$ 代入，得

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2}C_1^n + \frac{1}{3}C_2^n + \cdots + \frac{1}{n+1}C_n^n \text{ ，}$$

得證。

恆等式 6[1]: $\sum_{k=1}^{n} k^2 \left(C_k^n\right)^2 = n^2 C_{n-1}^{2n-2}$

證明：利用(2.3.2)，

$$n(1+x)^{n-1} = C_1^n + 2C_2^n x + 3C_3^n x^2 + \cdots + nC_n^n x^{n-1} \qquad (2.3.2)$$

將(2.3.2)式 等號兩邊同乘 x，得

$$nx(1+x)^{n-1} = C_1^n x + 2C_2^n x^2 + 3C_3^n x^3 + \cdots + nC_n^n x^n \qquad (2.6.1)$$

將(2.5.1)式 等號兩邊同乘 n，得

$$n(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} nC_k^n x^k = nC_0^n + nC_1^n x + nC_2^n x^2 + \cdots + nC_n^n x^n \qquad (2.6.2)$$

將 $(2.6.2)-(2.6.1)$ 得

$$n(1+x)^{n-1} = nC_0^n + (n-1)C_1^n x + (n-2)C_2^n x^2 + \cdots + (n-n)C_n^n x^n \cdots\cdots(2.6.3)$$

將(2.6.1)(2.6.3)式相乘後，比較等號兩邊 x^n 項係數得

$$n^2 C_{n-1}^{2n-2} = n^2 C_n^n C_0^n + (n-1)^2 C_{n-1}^n C_1^n + \cdots + 1^2 C_1^n C_{n-1}^n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \left(C_k^n\right)^2 \text{ ，}$$

得證。

參、習題的證明與延伸

習題 1[1]: 當 $n > k \geq 0$ 時， $(n-k)C_k^n = nC_k^{n-1}$ 。

證明：

方法 1：

班上共有 n 個同學，現在要分配打掃工作，選其中 k 個同學打掃教室內，其餘 $n-k$ 個同學打掃教室外，再從打掃教室外的人中選一個負責人，則方法數為 $C_k^n \cdot C_1^{n-k}$。另一方面，我們可以先從全班 n 個同學中選出一個外掃區負責人，再從剩下的 $n-1$ 個人中選 k 個人打掃教室內，其餘打掃教室外，方法數為 nC_k^{n-1} 。以上兩種方法所得結果應該相等，因此上面等式成立。

方法 2：

直接計算得

$$(n-k)C_k^n = (n-k)\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = nC_k^{n-1} \text{ ，}$$

得證。

方法 3：

利用(2.3.2)，

$$n(1+x)^{n-1} = C_1^n + 2C_2^n x + 3C_3^n x^2 + \cdots + nC_n^n x^{n-1} \qquad (2.3.2)$$

比較(2.3.2)式等號兩邊 x^{n-k-1} 項係數得

$$nC_{n-k-1}^{n-1} = (n-k)C_{n-k}^n \text{ ，} \quad \text{即 } nC_k^{n-1} = (n-k)C_k^n \text{ ，}$$

得證。

由上面習題 1 的組合論述，我們很容易可以延伸到下面的習題 2。

習題 2: 當 $n > k \geq 1$ 時， $k(n-k)C_k^n = n(n-1)C_{k-1}^{n-2}$ 。

證明：

方法 1：

班上共有 n 個同學，現在要分配打掃工作，選其中 k 個同學打掃教室內，其餘 $n-k$ 個同學打掃教室外，再從打掃教室內與教室外的人中各選一個負責人，則方法數為 $C_k^n \cdot k(n-k)$ 。另一方面，我們可以先從全班 n 個同學中選出一個教室外負責人及一個教室內負責人有 $n(n-1)$ 種方法，再從剩下的 $n-2$ 個人中選 $k-1$ 個人打掃教室內，其餘打掃教室外，總方法數為 $n(n-1)C_{k-1}^{n-2}$ 。以上兩種方法所得結果應該相等，因此上面等式成立。

方法 2：

直接計算得

$$k(n-k)C_k^n = k(n-k)\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!} = n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!} = n(n-1)C_{k-1}^{n-2}$$

得證。

習題 3[1]: 當 $n \geq k \geq 2$ 時， $k(k-1)C_k^n = n(n-1)C_{k-2}^{n-2}$ 。

證明：

方法 **1**：

從 n 個人當中選出 k 個人組成委員會，再從這 k 個委員中選出兩人當正副主席的方法數 $k(k-1)C_k^n$。另一方面，從 n 個人中先選 2 人當正副主席，再從剩下的 $n-2$ 人中選 $k-2$ 個人與正副主席搭配組成委員會，方法數為 $n(n-1)C_{k-2}^{n-2}$ 。以上兩種方法所得結果應該相等，因此上面等式成立。

方法 2：

利用(2.3.2)，

$$n(1+x)^{n-1} = C_1^n + 2C_2^n x + 3C_3^n x^2 + \cdots + nC_n^n x^{n-1} \qquad (2.3.2)$$

將(2.3.2)式 等號兩邊對 x 微分，得

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2C_2^n + 2\cdot 3C_3^n x^1 + \cdots + (k-1)kC_k^n x^{k-2} + \cdots + (n-1)nC_n^n x^{n-2} \qquad (3.3.1)$$

比較(3.3.1)式等號兩邊 x^{k-2} 項係數得

$$n(n-1)C_{k-2}^{n-2} = k(k-1)C_k^n \text{，}$$

得證。

習題 4[1]:當 $n \geq 2$ 時， $\sum_{k=0}^{n} k^2 C_k^n = n(n+1)\cdot 2^{n-2}$ 。

證明：

方法 **1**：

考慮 n 個人當中選出 k 個人組成委員會，再從 k 個委員中選出正副主席且正副主席可以同一人，則方法數 $k^2C_k^n$。若委員會人數可以從 0 至 n，則方法數為 $\sum_{k=0}^{n} k^2 C_k^n$ 。另一方面，從 n 個人中先選出正副主席，我們可以分成兩種情況來討論：

(1) 正副主席同一人，我們再從剩下的 $n-1$ 人選若干人與正副主席搭配組成委員會，因為剩下的每個人可以選擇進入或選擇不進入委員會，共 2 種選擇方法，所以方法數為 $n2^{n-1}$ 。

(2) 正副主席不同人，我們再從剩下的 $n-2$ 人選若干人與正副主席搭配組成委員會，因為剩下的每個人可以選擇進入或選擇不進入委員會，共 2 種選擇方法，所以方法數為 $n(n-1)2^{n-2}$ 。

所以(1)(2)總數為 $n2^{n-1}+n(n-1)2^{n-2}=n(n+1)2^{n-2}$ 。

以上兩種方法所得結果應該相等，因此上面等式成立。

方法 2：

利用(2.6.1)，

$$nx(1+x)^{n-1}=C_1^n x+2C_2^n x^2+3C_3^n x^3+\cdots+nC_n^n x^n \qquad (2.6.1)$$

將(2.6.1)式等號兩邊對 x 微分，得

$$n(n-1)x(1+x)^{n-2}+n(1+x)^{n-1}=C_1^n+2^2C_2^n x+3^2C_3^n x^2+\cdots+n^2C_n^n x^{n-1} \qquad (3.4.1)$$

將 $x=1$ 代入(3.4.1)式，得

$$n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}=C_1^n+2^2C_2^n+3^2C_3^n+\cdots+n^2C_n^n ,$$

整理得

$$n(n+1)2^{n-2}=C_1^n+2^2C_2^n+3^2C_3^n+\cdots+n^2C_n^n ,$$

得證。

由習題 4 的論證過程，我們可以延伸出新的等式(請參考習題 5)。

習題 5: 當 $n\geq 3$ 時， $\sum_{k=1}^{n}(k-1)k^2C_k^n=(n-1)n(n+2)2^{n-3}$ 。

證明：

方法 1：

設班上有 n 個人，從中選出 k 個人組成委員會，再從 k 個委員中選出班長、副班長與風紀股長且班長與副班長可以同一人但班長與風紀不可以是同一人，副班長與風紀股長可以同一人，則方法數 $(k-1)k^2C_k^n$。若委員會人數可以從 1 至 n，則方法數為 $\sum_{k=1}^{n}(k-1)k^2C_k^n$ 。

另一方面，從 n 個人中先選出班長、副班長與風紀股長，我們可以分成兩種情況來討論：

(1) 班長、副班長同一人，我們從剩下的 $n-1$ 人選 1 個當風紀，剩下 $n-2$ 人選若干人與班長、風紀股長搭配組成委員會，因為剩下的每個人可以選擇進入或選擇不進入委員會，共 2 種選擇方法，所以方法數為 $n(n-1)2^{n-2}$ 。

(2) 班長、副班長不同人，此時風紀股長可能與副班長相同或不同。可分成以下兩種情況：

(a) 若風紀與副班長同一人，可從剩下的 $n-2$ 人選若干人與班長、副班長搭配組成

委員會則有 $n(n-1)2^{n-2}$ 種方法。

(b) 若風紀與副班長不同人，我們再從剩下的 $n-3$ 人選若干人與班長、副班長與風紀股長搭配組成委員會，因為剩下的每個人可以選擇進入或選擇不進入委員會，共 2 種選擇方法，所以方法數為 $n(n-1)(n-2)2^{n-3}$ 。

所以(1)(2)總數為

$$n(n-1)2^{n-2}+\left[n(n-1)2^{n-2}+n(n-1)(n-2)2^{n-3}\right]=(n-1)n(n+2)2^{n-3}$$ 。

以上兩種方法所得結果應該相等，因此上面等式成立。

方法 2：

利用習題 4 的(3.4.1)式，為

$$n(n-1)x(1+x)^{n-2}+n(1+x)^{n-1}=C_1^n+2^2C_2^nx+3^2C_3^nx^2+\cdots+n^2C_n^nx^{n-1} \qquad (3.4.1)$$

將(3.4.1)式微分，得

$$\begin{aligned}&n(n-1)\left[\left(1+x\right)^{n-2}+x(n-2)(1+x)^{n-3}\right]+n(n-1)(1+x)^{n-2}\\&=1\cdot 2^2C_2^n+2\cdot 3^2C_3^nx^1+\cdots+(n-1)n^2C_n^nx^{n-2} \qquad (3.5.1)\end{aligned}$$

將 $x=1$ 代入(3.5.1)式，得

$$n(n-1)\left[2^{n-2}+(n-2)2^{n-3}\right]+n(n-1)2^{n-2}=1\cdot 2^2C_2^n+2\cdot 3^2C_3^n+\cdots+(n-1)n^2C_n^n$$ ，

整理得

$$(n-1)n(n+2)2^{n-3}=1\cdot 2^2C_2^n+2\cdot 3^2C_3^n+\cdots+(n-1)n^2C_n^n$$ ，

得證。

習題 6[1]: (Vandermonde's identity) 當 $m,n\geq 0$ ， $\sum_{j=0}^{k}C_j^mC_{k-j}^n=C_k^{m+n}$ 。

證明：

方法 1：

從 m 個男生及 n 個女生要選出 k 個人，一共有 C_k^{m+n} 種方法。另一方面，若我們用選出的男生人數來分類:

(1) 選出男生人數 0，女生人數 k，有 $C_0^mC_k^n$ 種方法。

(2) 選出男生人數 1，女生人數 k-1，有 $C_1^mC_{k-1}^n$ 種方法。

⋮

(k+1) 選出男生人數 k，女生人數 0，有 $C_k^mC_0^n$ 種方法。

所以總數為 $\sum_{j=0}^{k} C_j^m C_{k-j}^n$ 。

以上兩種方法所得結果應該相等，因此上面等式成立。

方法 2：利用二項式定理，

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} C_k^m x^k = C_0^m + C_1^m x + C_2^m x^2 + \cdots + C_m^m x^m \qquad (3.6.1)$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^k = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \cdots + C_n^n x^n \qquad (3.6.2)$$

將(3.6.1)與(3.6.2)相乘，得

$$(1+x)^{m+n} = (1+x)^m (1+x)^n = \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{j=0}^{k} C_j^m C_{k-j}^n x^k \qquad (3.6.3)$$

比較(3.6.3)式等號兩邊 x^k 項係數，得

$$C_k^{m+n} = \sum_{j=0}^{k} C_j^m C_{k-j}^n \text{ ，}$$

得證。

我們可以將習題 6 延伸成以下習題 7。

習題 7: 當 $m,n,l \geq 0$ ， $\sum_{a+b+c=k} C_a^m C_b^n C_c^l = C_k^{m+n+l}$ 。

證明：

方法 **1**：

從 m 個美國人、 n 個日本人及 l 個台灣人選 k 個人出來，則方法數有 C_k^{m+n+l} 種。另一方面，若我們用分類的方式來計數：從 m 個美國人選 a 個，從 n 個日本人選 b 個，從 l 個台灣人選 c 個，且 $a+b+c=k$ ，則總方法數為 $\sum_{a+b+c=k} C_a^m C_b^n C_c^l$ 。

以上兩種方法所得結果應該相等，因此上面等式成立。

方法 2：

利用二項式定理，

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} C_k^m x^k = C_0^m + C_1^m x + C_2^m x^2 + \cdots + C_m^m x^m \qquad (3.7.1)$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^k = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \cdots + C_n^n x^n \qquad (3.7.2)$$

$$(1+x)^l=\sum_{k=0}^{l}C_k^l x^k=C_0^l+C_1^l x+C_2^l x^2+\cdots+C_l^l x^l \qquad (3.7.3)$$

將(3.7.1)、(3.7.2)及(3.7.3)式相乘，得

$$(1+x)^{m+n+l}=(1+x)^m(1+x)^n(1+x)^l=\sum_{k=0}^{m+n+l}\sum_{a+b+c=k}C_a^m C_b^n C_c^l x^k \qquad (3.7.4)$$

比較(3.7.4)式等號兩邊 x^k 項係數，得

$$C_k^{m+n+l}=\sum_{a+b+c=k}C_a^m C_b^n C_c^l \text{，}$$

得證。

習題 8[1]: $n\ge 0, m\ge 1$，$\sum_{k\ge 0}kC_k^n C_k^m=nC_{m-1}^{n+m-1}$。

證明：

方法 1：

考慮從 n 個男生及 m 個女生中選 m 個人出來，並從選出的男生中選一人當隊長。我們可以用選取男生的人數來分類，當選取 k 個男生及 $m-k$ 個女生並從選出的男生中選一人當隊長，方法數為 $kC_k^n C_{m-k}^m$ 即 $kC_k^n C_k^m$，當 $k=1,\cdots,m$，總數為 $\sum_{k\ge 1}kC_k^n C_k^m=\sum_{k\ge 0}kC_k^n C_k^m$。另一方面，先從 n 個男生選一人當隊長，再從剩餘的 $n+m-1$ 人中選 $m-1$ 人跟隊長搭配，所以方法數為 nC_{m-1}^{n+m-1}。

以上兩種方法所得結果應該相等，因此上面等式成立。

方法 2：

利用(2.6.1)式及(3.7.1)式

$$nx(1+x)^{n-1}=C_1^n x+2C_2^n x^2+3C_3^n x^3+\cdots+nC_n^n x^n \qquad (2.6.1)$$

$$(1+x)^m=\sum_{k=0}^{m}C_k^m x^k=C_0^m+C_1^m x+C_2^m x^2+\cdots+C_m^m x^m \qquad (3.7.1)$$

將(2.6.1)與(3.7.1)式相乘，得

$$nx(1+x)^{n+m-1}=nx(1+x)^{n-1}(1+x)^m=\sum_{j=1}^{m+n}\sum_{k=1}^{j}kC_k^n C_{j-k}^m x^j \qquad (3.8.1)\text{，}$$

比較(3.8.1)式 x^m 項係數

$$nC_{m-1}^{n+m-1}=\sum_{k\ge 1}kC_k^n C_{m-k}^m=\sum_{k\ge 0}kC_k^n C_k^m \text{，}$$

得證。

由習題 8 的組合論述，我們可以延伸成以下習題 9。

習題 9: $n \ge 1,\ m \ge 2$ ，$\sum_{k \ge 1} k(m-k)C_k^n C_k^m = nmC_{m-2}^{n+m-2}$ 。

證明：

方法 1：

考慮從 n 個男生及 m 個女生中選 m 個人出來，並從選出的男生與女生中各選一人當隊長。我們可以用選取男生的人數來分類，當選取 k 個男生時及 $m-k$ 個女生並從選出的男生與女生中各選一人當隊長方法數為 $k(m-k)C_k^n C_{m-k}^m$ 即 $k(m-k)C_k^n C_k^m$ ，當 $k = 1,\cdots,m-1$ ，總數為 $\sum_{k \ge 1} k(m-k)C_k^n C_k^m$ 。另一方面，

從男生與女生中先各選一人當隊長，再從剩餘的 $n+m-2$ 人中選 $m-2$ 人跟隊長搭配，所以方法數為 nmC_{m-2}^{n+m-2} 。

以上兩種方法所得結果應該相等，因此上面等式成立。

方法 2:

利用(2.6.1)式，得

$$nx(1+x)^{n-1} = C_1^n x + 2C_2^n x^2 + 3C_3^n x^3 + \cdots + nC_n^n x^n \qquad (2.6.1)$$

將(2.6.1)的 n 用 m 取代，得

$$mx(1+x)^{m-1} = C_1^m x + 2C_2^m x^2 + 3C_3^m x^3 + \cdots + mC_m^m x^m \qquad (3.9.1)$$

將(2.6.1)與(3.9.1)式相乘，得

$$nmx^2(1+x)^{n+m-2} = nx(1+x)^{n-1} mx(1+x)^{m-1} = \sum_{j=2}^{m+n} \sum_{k=1}^{j} k(j-k)C_k^n C_{j-k}^m x^j \quad (3.9.2)\text{，}$$

比較(3.9.2)式 x^m 項係數

$$nmC_{m-2}^{n+m-2} = \sum_{k \ge 1} k(m-k)C_k^n C_{m-k}^m = \sum_{k \ge 1} k(m-k)C_k^n C_k^m \text{，}$$

得證。

肆、結語:

組合恆等式是組合數學中極有挑戰也饒富趣味的一個課題，一些等式的證明有時用組合論述來證明比用代數簡單，反之亦然。有興趣的讀者可在參考資料[2]中找到更多等式的介紹。

參考資料

[1] 許介彥。幾個恆等式的組合證明。**科學教育月刊, 354**, 44-50, 2012。

[2] R. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik (1994). Concrete Mathematics : *A Foundation for Computer Science. Addison*-Wesley Professional, 2nd edition