中學生通訊解題第 136 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
13601

(1) 請把 11 寫成若干個連續正整數的和。（大於等於 2 個）

(2) 請把 22, 44, 88 寫成若干個連續正整數的和。

(3) 請說明任何一個不小於 3 的正奇數均可以寫成若干個連續正整數的和。

(4) 請說明任何一個含有奇質因數的正整數均可以寫成若干個連續正整數的和。

【詳解】

(1) $11=5+6$

(2) $22=4+5+6+7$

$44=2+3+4+5+6+7+8+9$

$$\begin{aligned}88&=(-2)+(-1)+0+1+2+3+4\\&\quad+5+6+7+8+9+10+11+12+13\\&=3+4+5+6+7+8+9+10\\&\quad+11+12+13\end{aligned}$$

(3) $2k+1=k+(k+1)$

(4) n 必可寫成 $n=(2k+1)\times 2^t$，則由 $k+(k+1)$ 開始一直往前後擴張，直到有 2^t 組，即

$n=(k-2^t+1)+(k-2^t+2)+\cdots$

$\cdots+k+(k+1)+\cdots+(k+2^t)$。

若 $(k-2^t+1)<0$，則把前面的項如(2)中 88 的作法刪除，故任何一個含有奇質因數的正整數均可以寫成若干個連續正整數的和。

【解題評析】

本題作答者有 46 人，平均得 3.43 分。題目的最終目的，其實是想要處理所有可寫成若干個連續正整數之和的自然數，而哪些不可以？這個題目的安排，是提供大家一個處理的脈絡：從簡單的數字出發，最後可以歸納出結論。這不是唯一的思考脈絡，很多同學也提供了不同的想法，很值得鼓勵。然而，在因應到一般性的數字時，大部分的同學就比較無法嚴謹的思考清楚或表達清楚，希望各位同學可以找相關的問題練習，試著用自己的語言完整的表達清楚。

問題編號
13602

求所有實數 c 使得方程式 $x^2+\frac{18}{5}x+c=0$ 的兩個實根可以和 c 構成等差數列。

簡答：$c=\frac{-9}{5}$ 或 $\frac{9}{5}$ 或 $\frac{-72}{5}$

【詳解】

設 x_1, x_2 為方程式的兩根，d 為公差。

(1) 若 c 為等差中項，得

$$x_1 + x_2 = 2c = -\frac{18}{5} \Rightarrow c = -\frac{9}{5}，$$

此時兩根為 $\dfrac{-9 \pm 3\sqrt{14}}{5}$。

(2) 若 c 為等差數列的首項或末項，不妨設 $x_1 = c + d,\ x_2 = c + 2d$，

則 $x_1 + x_2 = -\dfrac{18}{5} = 2c + 3d$

$\Rightarrow d = \dfrac{-2}{3}c - \dfrac{6}{5}$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{3}c - \dfrac{6}{5},\ x_2 = \dfrac{-1}{3}c - \dfrac{12}{5}$。

又 $x_1 x_2 = c$，所以

$(\dfrac{1}{3}c - \dfrac{6}{5})(\dfrac{-1}{3}c - \dfrac{12}{5}) = c$

$\Rightarrow (5c + 72)(5c - 9) = 0$

$\Rightarrow c = \dfrac{9}{5}$ 或 $\dfrac{-72}{5}$。

當 $c = \dfrac{9}{5}$，兩根為 $-3, -\dfrac{3}{5}$，

此時 $-3, -\dfrac{3}{5}, \dfrac{9}{5}$ 成等差；

當 $c = \dfrac{-72}{5}$，兩根為 $-6, \dfrac{12}{5}$，

此時 $\dfrac{-72}{5}, -6, \dfrac{12}{5}$ 成等差。

所以 $c = \dfrac{-9}{5}$ 或 $\dfrac{9}{5}$ 或 $\dfrac{-72}{5}$。

【解題評析】

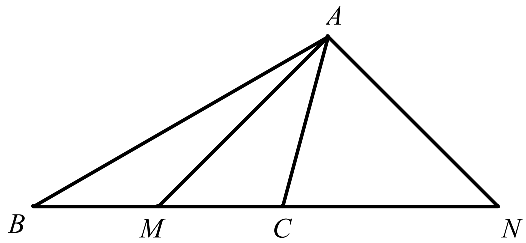
本題的解法需要討論 c 為等差中項或者是 c 為等差數列的首項或末項，用一元二次方程式的根與係數的關係來列式解出 c 值，最後再檢查求出的 c 值是否可讓方程式有兩個實根。

本題徵答人數 5 人，其中 3 位獲得滿分 7 分，其餘未獲滿分同學因計算錯誤未能求出正確答案，仍有一定的成績。

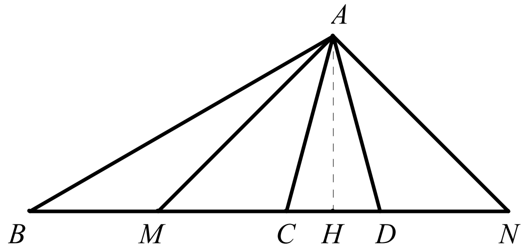
問題編號

13603

在 ΔABC 中，$\angle ACB$ 為鈍角，M 為 $\overline{BC}$ 邊的中點，N 在直線 BC 上且 $\overline{AM} = \overline{AN}$，已知 $\overline{MN} = \overline{AB}$，證明 $\angle ACB - \angle CAB = 2\angle B$。



【證明】



作 $\overline{AH} \perp \overline{BD}$ 於點 H，在 $\overline{BD}$ 上取一點 D 使得 $\overline{CH} = \overline{HD}$。

因為 $\overline{AM} = \overline{AN}$，所以 $\overline{MH} = \overline{HN}$，

又 $\overline{CH} = \overline{HD}$，所以 $\overline{CM} = \overline{DN}$，

得 $\overline{MN} = 2\overline{MC} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{BD}$，

所以 $\overline{BA} = \overline{BD}$，得 $\angle ADB = \angle BAD$。

設 $\angle ACB = 90^\circ + \theta$，所以

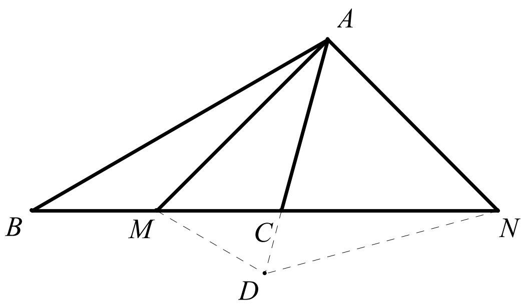
$\angle ACD = \angle ADC = \angle BAD = 90^\circ - \theta$，

$\angle B = \angle CAD = 2\theta$，$\angle CAB = 90^\circ - 3\theta$，

得 $\angle ACB - \angle CAB = (90^\circ + \theta) - (90^\circ - 3\theta)$

$= 4\theta = 2\angle B$。

【證明 2】鐘景翰同學、陳彥睿同學的解法



分別以 M、N 為圓心，$\overline{MB}$、$\overline{AM}$ 為半徑畫圓，交 ΔABN 外部於 D 點，因為 $\overline{MD} = \overline{MB}$，$\overline{ND} = \overline{AM}$，$\overline{MN} = \overline{AB}$ 可知 $\Delta ABM \cong \Delta NMD$ (SSS)。

令 $\angle B = \angle CMD = 2\theta$，

$\angle BAM = \angle MND = \alpha$，

所以 $\angle AMB = \angle NDM = 180^\circ - 2\theta - \alpha$，

連 $\overline{CD}$，因為 M 為 $\overline{BC}$ 邊的中點，

所以 $\overline{MB} = \overline{MC} = \overline{MD}$，

得 ΔMCD 為等腰三角形，所以

$\angle MDC = 90^\circ - \theta$，

得 $\angle CDN = 90^\circ - \theta - \alpha$。

連 $\overline{AD}$，因為 $\overline{AM} = \overline{AN}$，

所以 $\angle ANM = \angle AMN = 2\theta + \alpha$，

得 $\angle AND = 2\theta + 2\alpha$，又因為

$\overline{AN} = \overline{ND}$，所以 $\angle ADN = 90^\circ - \theta - \alpha$。

所以 $\angle CDN = \angle ADN$，得 A、C、D 三點共線，因為

$\angle ACB = 180^\circ - \angle MCD = 90^\circ + \theta$，

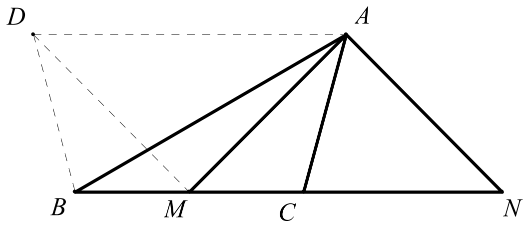
$\angle CAB = \angle CAN - \angle B$

$= (90^\circ - \theta) - 2\theta = 90^\circ - 3\theta$，所以

$\angle ACB - \angle CAB = (90^\circ + \theta) - (90^\circ - 3\theta)$

$= 4\theta = 2\angle B$。

【證明 3】沈執中同學的解法



作 $\overline{AD} // \overline{MN}$ 且 $\overline{AD} = \overline{MN}$，連 $\overline{DM}$、$\overline{DB}$，可知 $ADMN$ 為平行四邊形。

所以 $\overline{AN} // \overline{DM}$ 且 $\overline{AN} = \overline{DM}$，

又 $\overline{AM} = \overline{AN}$，

所以 $\angle DMB = \angle AMC = \angle N$，

又 $\overline{MB} = \overline{MC}$，得 $\Delta DMB \cong \Delta AMC$ (SAS)，所以 $\overline{AC} = \overline{BD}$，

得 $ADBC$ 為等腰梯形。

令 $\angle B = \angle DAB = 2\theta$，

因為 $\overline{AD} = \overline{MN} = \overline{AB}$，

所以 ΔDAB 為等腰三角形，

得 $\angle ADB = \angle ABD = \angle DAC = 90^\circ - \theta$，

所以 $\angle ACB = 180^\circ - \angle CAD = 90^\circ + \theta$，

$\angle CAB = 180^\circ - \angle ACB - \angle B = 90^\circ - 3\theta$，
得 $\angle ACB - \angle CAB$
$= (90^\circ + \theta) - (90^\circ - 3\theta) = 4\theta = 2\angle B$。

【解題評析】

本題的解法關鍵主要在於如何使用 $\overline{MN} = \overline{AB}$ 這個條件，大部分的同學都使用對稱找出等腰三角形來處理這個問題，鐘景翰同學與陳彥睿同學則是利用兩個三角形全等得到其中的三點會共線，而沈執中同學則是找出平行四邊形來證明，兩種解法都非常值得嘉許！

問題編號
13604

在 9×9 的 81 個方格裡，分別填上從 1 到 81 這 81 個自然數。試證：從這張表裡必能找出兩相鄰的數，它們的差不小於 5。此處相鄰的兩數指兩個有公共邊的方格裡的數。

【證明】

利用反證法。若任相鄰兩數的差皆小於 5，導出矛盾。

設 1 和 81 在方格表中所處的位置如圖示，則 1、81 兩數中間會經過最多 15 個數。設任意兩個相鄰數之差皆小於 5，則

$a_1 - 1 \le 4$, $a_2 - a_1 \le 4$, …, $a_{15} - a_{14} \le 4$,

$81 - a_{15} \le 4$。

把這 16 個不等式相加，得 $80 \le 64$。矛盾！

				8 1
				a_{15}
				a_{14}
1	a_1	a_2	…	a_8

【解題評析】

本題徵答人數共 4 人，全部答對得 7 分者有 3 人。反證法在一些存在性的問題上是一個很好的證明方式。在本題目中，命題:「必能找出兩相鄰的數，它們的差不小於 5」，它的否定是「對所有相鄰的兩數，它們的差都小於 5」，只要說明否定命題是錯的，即得證。一般而言，說明一個命題是錯的方式是找出一個反例，所以我們可以舉 1、81 間格最多的一個情況作為反例。

問題編號
13605

小明與小美玩一個遊戲，在這個遊戲中，每一輪都沒有平局。他們事先約定了在一輪遊戲中，贏的一方取 m 粒糖果，輸的一方取 n 粒糖果，且 $m > n > 0$。若干輪以後，已知小美一共贏了 2 輪，且小明共得了 18 粒糖果，小美共得了 21 粒糖果。求 m, n 之值？。

簡答：$m=8,\ n=5$

【詳解】

在遊戲進行若干輪後，兩人共有 $18+21=39=3\times 13$ 粒糖果。

遊戲在每一輪後，兩人共取 $m+n$ 粒糖果。

當遊戲多於 2 輪時，有兩種可能性：

(1) $m+n=3$：

小明與小美共玩了 13 輪，其中小美贏了 2 輪。

由於 $m>n>0$，於是 $m=2, n=1$，小美將取到 $2\times 2+11\times 1=15$ 粒糖果，與已知矛盾。

(2) $m+n=13$：

小明與小美共玩了 3 輪，其中小美贏了 2 輪。

這時，數對 (m,n) 有以下幾種可能：$(12,1), (11,2), (10,3), (9,4), (8,5), (7,6)$，由於 $2m+n=21$，只有數對 $(8,5)$ 滿足這一條件。

故每一輪應取 $m=8,\ n=5$ 粒糖果。

【解題評析】

本題有很多同學參與解題，屬於較容易的題目，其中有同學寫了兩種解法，值得嘉許。