拉曼奴姜等式 $\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right]=\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}}\right]$ 的推廣

許閎揚* 周芳宇

彰化縣立彰化藝術高級中學

壹、前言

在 1918 年左右印度數學家拉曼奴姜(Ramanujan)發現了數學式:

$\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right]=\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}}\right]$，其中 n 是任意自然數，[x]表示小於或等於 x 的最大整數。他將這個發現投稿到印度數學期刊[4]，證明可在[3]的第 77-78 頁找到。在 2014 年彰師大研討會中，陳國傑老師對這數學式給出了一個簡單的數論證明[2]，隨後李錦鎣老師也做出了許多的推廣[1]。在計算機幫助下，我們對這數學式做了一些數值實驗，再參考了李錦鎣老師的證明手法後，我們也得到一些推廣結果。

貳、$\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right]=\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}}\right]$ 的推廣

在文章[1]中李錦鎣老師將數學式 $\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right]=\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}}\right]$ 推廣為以下定理：

定理 1[1]：若 $\frac{1}{4}<p<1.25$，則對任意自然數 n，$\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+p}\right]=\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}}\right]$ 必成立。

我們將它進一步推廣為：

定理 2：若 k 是一個自然數，當 $\frac{1}{4}<p<\frac{1}{4}+\frac{1}{k}$，則對任意自然數 n，

$$\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{n}{k}+p}\right]=\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{n}{k}+\frac{1}{4}}\right]$$ 必成立。

*為本文通訊作者

證明：任選 p 滿足 $\frac{1}{4}<p<\frac{1}{4}+\frac{1}{k}$，若存在一個自然數 n，使得

$\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{n}{k}+p}\right]\neq\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{n}{k}+\frac{1}{4}}\right]$，也就是存在一自然數 n，使得 $\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{n}{k}+p}$ 整數部分大於 $\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{n}{k}+\frac{1}{4}}$ 整數部分，那麼就有一個自然數 m，使得 $\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{n}{k}+\frac{1}{4}}<m\leq\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{n}{k}+p}$，所以 $\frac{n}{k}+\frac{1}{4}<\left(m-\frac{1}{2}\right)^2\leq\frac{n}{k}+p$，平方展開得

$$\frac{n}{k}+\frac{1}{4}<m^2-m+\frac{1}{4}\leq\frac{n}{k}+p<\frac{n}{k}+\frac{1}{4}+\frac{1}{k}\text{，}$$

整理得

$$\frac{n}{k}<m^2-m<\frac{n}{k}+\frac{1}{k}\text{，}$$

得

$$n<k(m^2-m)<n+1\text{，}$$

則整數 $k(m^2-m)$ 介於 n 與 $n+1$ 之間，得到矛盾。因此，對任意自然數 n，

$\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{n}{k}+p}\right]=\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{n}{k}+\frac{1}{4}}\right]$ 必成立。

參、$\left[\frac{1}{k}+\sqrt{n+q}\right]=\left[\frac{1}{k}+\sqrt{n}\right]$ 的推廣

在文章[1]中，李錦鎣老師給出了下面的定理：

定理 3[1]：任取一個大於 1 的自然數 k，若 $0<q<\frac{1}{k^2}$，則對任意自然數 n，

$\left[\frac{1}{k}+\sqrt{n+q}\right]=\left[\frac{1}{k}+\sqrt{n}\right]$ 必成立。

我們可以將定理 3 進一步推廣，得到以下結果：

定理 4：若 t 是一個自然數，任取一個大於 1 的自然數 k，若 $0<q<\frac{1}{tk^2}$，則對任意自然數 n，$\left[\frac{1}{k}+\sqrt{\frac{n}{t}+q}\right]=\left[\frac{1}{k}+\sqrt{\frac{n}{t}}\right]$ 必成立。

證明：任選 q 滿足 $0<q<\frac{1}{tk^2}$，若存在一個自然數 n，使得 $\left[\frac{1}{k}+\sqrt{\frac{n}{t}+q}\right]\neq\left[\frac{1}{k}+\sqrt{\frac{n}{t}}\right]$，

也就是存在一自然數 n，使得 $\frac{1}{k}+\sqrt{\frac{n}{t}+q}$ 整數部分大於 $\frac{1}{k}+\sqrt{\frac{n}{t}}$ 整數部分，那麼就有一個自然數 m，使得 $\frac{1}{k}+\sqrt{\frac{n}{t}}<m\leq\frac{1}{k}+\sqrt{\frac{n}{t}+q}$，所以 $\frac{n}{t}<\left(m-\frac{1}{k}\right)^2\leq\frac{n}{t}+q$，

平方展開得

$$\frac{n}{t}<m^2-\frac{2m}{k}+\frac{1}{k^2}\leq\frac{n}{t}+q<\frac{n}{t}+\frac{1}{tk^2},$$

整理得

$$\frac{n}{t}-\frac{1}{k^2}<m^2-\frac{2m}{k}<\frac{n}{t}+\frac{1}{tk^2}-\frac{1}{k^2},$$

不等號兩邊同乘 k^2t，得

$$k^2n-t<t(k^2m^2-2km)<k^2n+1-t,$$

則整數 $t(k^2m^2-2km)$ 介於 k^2n-t 與 k^2n-t+1 之間，得到矛盾。因此對任意自然數 n，$\left[\frac{1}{k}+\sqrt{\frac{n}{t}+q}\right]=\left[\frac{1}{k}+\sqrt{\frac{n}{t}}\right]$ 必成立。

肆、結語

在這個時代，計算機不但普及而且功能強大，我們可以用它來對拉曼奴姜的這個等式進行各種數值實驗，進而得出許多關於等式的猜想。藉由李錦鎣老師所介紹的證明方式，我們則可以將猜想轉為定理。雖然這些等式在數學上並非重要的定理，但卻可以當作學生學習探索發現的題材，而且證明的過程也相當簡單有趣。

參考文獻

李錦鎣(2015)。由 $\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right]=\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}}\right]$ 談數學發現的一種方法。自然科學與教育，1 卷 1 期，p.73~90，2015。

Kuo-Jye Chen：On a problem proposed by Ramanujan , 彰化師範大學自然科學 研討會會議手冊, 2014。

http://science.ncue.edu.tw/journal/article/1-2-7.pdf

B. C. Berndt, Ramanujan's Notebooks, Part IV, Springer-Verlag, New York, 1994.

S. Ramanujan, Question 723, J. Indian Math. Soc., Volume 10 (1918) 357-358.