以均差運算列表法及函數圖形平移法求取多項式函數(下)

李輝濱

嘉義市私立輔仁中學退休教師

E. 範例解說並展示逆推均差運算法

E1. 逆推均差運算法：

因為在 B 節運算表中 1 階、2 階、3 階、⋯、$n-2$階、$n-1$階、n階等各階的第 1 項數值恰好成有秩序地逐一分別落在 C1 節運算表中 p_1列、1 階、2 階、3 階、⋯、$n-3$階、$n-2$階、$n-1$階等各階的第 2 項位置處，所以在做降 1 次數的$n-1$次多項式函數 $p_1 = p_1(v) = \sum_{t=1}^{n} b_t v^{t-1}$ 的均差運算表時，C1 節運算表中 p_1列、1 階、2 階、3 階、⋯、$n-3$階、$n-2$階、$n-1$階等各階列的第 1 項位置處只有$n-1$階列的第 1 項位置處的常數b_n是可知的，其餘均未知。此因b_n是n次項係數，在任一級均差運算表中必出現於最末一列的常數值。以此b_n值出發，一一逆向逐次計算出上一階的第 1 項位置數值。現在，示範作降 1 次數的$n-1$次多項式函數 $p_1 = p_1(v) = \sum_{t=1}^{n} b_t v^{t-1}$ 的 C1.節各階第 1 項數值逆推均差運算，演繹流程如下；

[1] 因b_n值是$n-1$階運算出的結果，在$n-1$階列的第 1 項位置處，由表格對應位置知；

$[b_1, p_1(v_1), p_1(v_2), \cdots, p_1(v_{n-1})] = b_n$ ，再由均差運算式知；

$$b_n = \frac{[p_1(v_1), p_1(v_2), p_1(v_3), \cdots, p_1(v_{n-1})] - [b_1, p_1(v_1), p_1(v_2), \cdots, p_1(v_{n-2})]}{v_{n-1} - 0} \quad \Rightarrow$$

$$[p_1(v_1), p_1(v_2), \cdots, p_1(v_{n-1})] - [b_1, p_1(v_1), p_1(v_2), \cdots, p_1(v_{n-2})] = b_n(v_{n-1} - 0)$$

$$= b_n[(v_{n-1} + v_{n-2} + \cdots + v_2 + v_1) - (v_{n-2} + v_{n-3} + \cdots + v_1 + 0)]$$ ⇒作逆向推演，得；

$$[p_1(v_1), p_1(v_2), \cdots, p_1(v_{n-1})] = b_n(v_{n-1} + v_{n-2} + v_{n-3} + \cdots + v_2 + v_1) + b_{n-1}$$ 與

$$[b_1, p_1(v_1), p_1(v_2), \cdots, p_1(v_{n-2})] = b_n(v_{n-2} + v_{n-3} + \cdots + v_2 + v_1 + 0) + b_{n-1}$$

這樣就完成了第 1 次逆推而得到 C1.節運算表中$n-2$階列的第 1 項數值。

[2] 再由 $[p_1(v_1), p_1(v_2), \cdots, p_1(v_{n-2})] - [b_1, p_1(v_1), p_1(v_2), \cdots, p_1(v_{n-3})]$

$= (v_{n-2} - 0)\,[\,b_n\,(v_{n-2} + v_{n-3} + \cdots + v_2 + v_1 + 0) + b_{n-1}]$

$= b_n\,v_{n-2}\,(v_{n-2} + v_{n-3} + \cdots + v_2 + v_1 + 0) + \ b_{n-1}(\,v_{n-2} - 0)$

$= b_n\,\{\,v_{n-2}\,(v_{n-2} + v_{n-3} + \cdots + v_2 + v_1) + [\,v_{n-3}(v_{n-3} + \cdots + v_2 + v_1) +$

$v_{n-4}(v_{n-4} + \cdots + v_2 + v_1) + \cdots + v_2(v_2 + v_1) + v_1^{\ 2}]\ -$

$[\,v_{n-3}(v_{n-3} + \cdots + v_2 + v_1 + 0) + v_{n-4}(v_{n-4} + \cdots + v_2 + v_1 + 0) + \cdots + v_2(v_2 + v_1 + 0) + v_1^{\ 2}]\}$

$+ b_{n-1}[\,(v_{n-2} + v_{n-3} + \cdots + v_2 + v_1) - (v_{n-3} + v_{n-4} + \cdots + v_1 + 0)]\qquad \Rightarrow$

$[\,b_1, p_1(v_1), p_1(v_2),\ \cdots\ , p_1(v_{n-3})\,] = \ b_n[\,v_{n-3}(v_{n-3} + v_{n-4} + \cdots + v_2 + v_1 + 0)$

$+ v_{n-4}(v_{n-4} + v_{n-5} + \cdots + v_2 + v_1 + 0) + \cdots + v_2(v_2 + v_1 + 0) + v_1^{\ 2}] +$

$b_{n-1}\,(v_{n-3} + v_{n-4} + \cdots + v_2 + v_1 + 0) + \ b_{n-2}$

$= \ b_n(\sum_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-4}=2} v_1^{\ k_0} v_2^{\ k_1} v_3^{\ k_2} \cdots v_{n-3}^{\ \ k_{n-4}}) + b_{n-1}(\sum_{i=1}^{n-3} v_i) + b_{n-2}$

這樣又完成了第 2 次逆推而得到 C1.節運算表中 $n-3$ 階的第 1 項數值。

[3] 持續上述相同的逆推均差運算演繹歷程，逐步演算出 $n-4$ 階、$n-5$ 階、$n-6$ 階、$n-7$ 階、…、2 階、1 階、0 階直到 b_1 真確的數值出現為止。

當運算到 2 階時： $[\,p_1(v_1), p_1(v_2), p_1(v_3)\,]\ -\ [\,b_1, p_1(v_1), p_1(v_2)\,]$

$= (v_3 - 0)\,[\,b_1, p_1(v_1), p_1(v_2), p_1(v_3)\,] = (v_3 - 0)\cdot \sum_{t=4}^{n} b_t(\sum_{i+j+k=t-4} v_1^{\ i} v_2^{\ j} v_3^{\ k})$

$= \ \sum_{t=4}^{n} b_t(\sum_{i+j+k=t-4} v_1^{\ i} v_2^{\ j} v_3^{\ k+1})$

$= \ \sum_{t=3}^{n} b_t(\sum_{i+j+k=t-3} v_1^{\ i} v_2^{\ j} v_3^{\ k})\ -\ \sum_{t=3}^{n} b_t(\sum_{i=0}^{t-3} v_1^{\ t-3-i} v_2^{\ i})\qquad \Rightarrow$

$[\,b_1, p_1(v_1), p_1(v_2)\,] = \ \sum_{t=3}^{n} b_t(\sum_{i=0}^{t-3} v_1^{\ t-3-i} v_2^{\ i})$

到 1 階時： $[\,p_1(v_1), p_1(v_2)\,]\ -\ [\,b_1, p_1(v_1)\,] = (v_2 - 0)\,[\,b_1, p_1(v_1), p_1(v_2)\,]$

$= (v_2 - 0)\cdot \sum_{t=3}^{n} b_t(\sum_{i=0}^{t-3} v_1^{\ t-3-i} v_2^{\ i}) = \ \sum_{t=3}^{n} b_t(\sum_{i=0}^{t-3} v_1^{\ t-3-i} v_2^{\ i+1})$

$= \ \sum_{t=2}^{n} b_t(\sum_{i=0}^{t-2} v_1^{\ t-2-i} v_2^{\ i})\ -\ \sum_{t=2}^{n} b_t v_1^{\ t-2}\quad \Rightarrow\quad [\,b_1, p_1(v_1)\,] = \ \sum_{t=2}^{n} b_t v_1^{\ t-2}$

0 階時： $p_1(v_1) - b_1\ = (v_1 - 0)[\,b_1, p_1(v_1)\,] = (v_1 - 0)\cdot \sum_{t=2}^{n} b_t v_1^{\ t-2} = \ \sum_{t=2}^{n} b_t v_1^{\ t-1}$

$= (\sum_{t=2}^{n} b_t v_1^{\ t-1}) + b_1 - b_1\ =\ (\sum_{t=1}^{n} b_t v_1^{\ t-1}) - b_1\qquad \Rightarrow$

$p_1(v_0)=p_1(0)=b_1$　或　$b_1=\sum_{t=1}^{n} b_t \cdot 0^{t-1}$　，同理，還可得到；

$p_1(v_1)=\sum_{t=1}^{n} b_t {v_1}^{t-1}$ ，　… ，$p_1(v_k)=\sum_{t=1}^{n} b_t {v_k}^{t-1}$ ，　$1 \le k \le n$　，k 為正整數。

，因此完成了 $n-1$ 次逆推配型運算而得到完整的多項式；$p_1 = p_1(v)=\sum_{t=1}^{n} b_t v^{t-1}$ 。

在這逆推過程中最主要關鍵是：每一個由 b_i 係數引導的代數式皆必須被配型成兩組有規律次序又互為對稱的同次數項式，而得證出任一階運算的第 1 項數值。理論推演看起來似乎很複雜，然而，實際的演算僅須透過數字間簡單乘法與減法計算出的逆推均差運算列表法即可快速達成編製表格。

E2. 範例解說：　本節將以實際範例詳盡解說應用逆推均差運算列表法直取試驗性多項式函數　$z=g(v)=\sum_{t=0}^{n} b_t v^t$　的標準運算作業流程；

[1]　假定平面坐標上已知數據點依序排列為：$(-4,-26)$, $(-2,\ -22)$, $(-1,-14)$, $(2,106)$, $(3, 58)$,$(5, 3898)$ 等 6 個數據點，沒有$(0, a_0)$點，試想要找出一個 5 次數多項式函數 $y=f(x)$ 的曲線通過這些點，依照各階均差運算法則實際製作出其橫式原型均差運算表，詳細計算的數字結果按標準操作順序樣示排列如下；

(1a) 已知數據點的橫式原型均差運算表：

x ：	-4		-2		-1		2		3		5
y ：	-26		-22		-14		106		58		3898
1 階：		2		8		40		-48		1920	
2 階：			2		8		-22		656		
3 階：				1		-6		113			
4 階：					-1		17				
5 階：						2					

(1b) 因沒有$(0, a_0)$數據點，則將原數據點(x , $f(x)$)假設為新數據點(v , $g(v)$)，使 $v_i = x_i - x_0$　$(0 \le i \le n)$ ，且　$g(v_i)=y_i=f(x_i)$ ，形成一新構的試驗性多項式函數 $z=g(v)=\sum_{t=0}^{n} b_t v^t$ ，而　$b_n = a_n$　。再編製出此試驗性多項式函數 z 橫式均差運算表：

x ：	-4	-2	-1	2	3	5
v ：	0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v ：	0	2	3	6	7	9
z ：	-26	-22	-14	106	58	3898

1 階：	2		8		40		-48		1920
2 階：		2		8		-22		656	
3 階：			1		-6		113		
4 階：				-1		17			
5 階：					$2=b_5$				

由表格中可得出； $b_5=a_5=2$ ， $b_0=-26$ 。

(1c) 作出降 1 次數的 $p_1=p_1(v)=\sum_{t=1}^{n} b_t v^{t-1}$ 多項式函數的均差運算表，將上述多項式函數 z 橫式均差運算表中 1 階、2 階、3 階、4 階、5 階等各階的第 1 項數值 2、2、1、-1、2 依序置放於此降 1 次數的 $p_1(v)$ 均差運算(局部)表中 p_1 列、1 階、2 階、3 階、4 階等列的第 2 項位置處，並做成下述降 1 次數局部列表：

v：	0		2		3		6		7		9
p_1：	b_1		2								
1 階：		$?_1$		2							
2 階：			$?_2$		1						
3 階：				$?_3$		-1					
4 階：					$2=b_5$		$2=b_5$				

現在要應用逆推運算法逐一計算出表列中的 $?_3$、$?_2$、$?_1$、b_1 值；首先看 $?_3$是在 3 階的第 1 位置處，由均差運算知： $(-1)-(?_3)=2\cdot(7-0)$ $\Rightarrow$ $(?_3)=-15$ ，其次再看 $?_2$，可知： $1-(?_2)=(?_3)\cdot(6-0)$ $\Rightarrow$ $(?_2)=91$ ，接著看 $?_1$，可知：$2-(?_1)=(?_2)\cdot(3-0)$ $\Rightarrow$ $(?_1)=-271$ ，最後，由 $2-b_1=(?_1)\cdot(2-0)$ $\Rightarrow$ $b_1=544$ ，因此完成的這個降 1 次數局部列表如下述情形；

v：	0		2		3		6		7		9
p_1：	544		2								
1 階：		-271		2							
2 階：			91		1						
3 階：				-15		-1					
4 階：					$2=b_5$		$2=b_5$				

在此逆推運算過程可得到； $b_1=544$ 。

(1d) 作出降 2 次數的 $p_2 = p_2(v) = \sum_{t=2}^{n} b_t v^{t-2}$ 多項式函數均差運算表，如下；將上述(1c)節的 $p_1 = p_1(v)$ 運算表中 1 階、2 階、3 階、4 階等各階的第 1 項數值 -271、91、-15、2 依序置放於此降 2 次數的 $p_2(v)$ 均差運算(局部)表中 p_2 列、1 階、2 階、3 階等列的第 2 項位置處，並做成下述降 2 次數局部列表：

v：	0		2		3		6		7		9
p_2：	b_2		-271								
1 階：		$?_{21}$		91							
2 階：			$?_{22}$		-15						
3 階：				2		2					

未知數 $?_{22}$ 是在 2 階的第 1 位置處，由均差運算知： $(-15) - (?_{22}) = 2 \cdot (6-0)$ $\Rightarrow$ $(?_{22}) = -27$ ，而 $91 - (?_{21}) = (?_{22}) \cdot (3-0)$ $\Rightarrow$ $(?_{21}) = 172$ ，最後，再由 $(-271) - b_2 = (?_{21}) \cdot (2-0)$ $\Rightarrow$ $b_2 = -615$ ，完成的降 2 次數局部列表如下述；

v：	0		2		3		6		7		9
p_2：	-615		-271								
1 階：		172		91							
2 階：			-27		-15						
3 階：				2		2					

在此逆推運算過程可得到； $b_2 = -615$ 。

(1e) 作出降 3 次數的 $p_3 = p_3(v) = \sum_{t=3}^{n} b_t v^{t-3}$ 多項式函數均差運算表；將上述(1d).節的 $p_2 = p_2(v)$ 運算表中 1 階、2 階、3 階等各階的第 1 項數值 172、-27、2、依序置放於此降 3 次數的 $p_3(v)$ 均差運算(局部)表中 p_3 列、1 階、2 階等列的第 2 項位置處，並做成下述降 3 次數的 $p_3(v)$ 均差運算局部列表：

v：	0		2		3		6		7		9
p_3：	b_3		172								
1 階：		$?_{31}$		-27							
2 階：			2		2						

未知數 $?_{31}$ 是在 1 階的第 1 位置處，由均差運算知： $(-27) - (?_{31}) = 2 \cdot (3-0)$ $\Rightarrow$ $(?_{31}) = -33$ ，最後，再由 $172 - b_3 = (?_{31}) \cdot (2-0)$ $\Rightarrow$ $b_3 = 238$ ，因此完成的這個降 3 次數 $p_3(v)$ 均差運算局部列表如下述；

v：	0	2	3	6	7	9
p_3：	238	172				
1 階：		-33	-27			
2 階：			2	2		

在此逆推運算過程可得到； $b_3 = 238$ 。

(1f) 作出降 4 次數的 $p_4 = p_4(v) = \sum_{t=4}^{n} b_t v^{t-4}$ 多項式函數均差運算表；將上述(1e).節的 $p_3 = p_3(v)$ 運算表中 1 階、2 階等各階的第 1 項數值 -33、2、依序置放於此降 4 次數的 $p_4(v)$ 均差運算(局部)表中 p_4 列、1 階等列的第 2 項位置處，並做成下述降 4 次數的 $p_4(v) = b_5 v + b_4$ 多項式函數均差運算局部列表：

v：	0	2	3	6	7	9
p_4：	b_4	-33				
1 階：		2	2			

由均差運算知： $(-33) - b_4 = 2 \cdot (2-0) \quad \Rightarrow \quad b_4 = -37$ 。

(1g) 由以上逆推均差運算過程，得到 $b_0 = -26$，$b_1 = 544$，$b_2 = -615$，$b_3 = 238$，$b_4 = -37$，$b_5 = 2$ ，則直接得出的試驗性多項式函數 $z = g(v) = \sum_{t=0}^{n} b_t v^t$ 為 $z = g(v) = 2v^5 - 37v^4 + 238v^3 - 615v^2 + 544v - 26$ ，此多項函數 z 並非滿足已知數據點的多項式函數，需要再透過函數圖形平移法操作以轉換成正確多項函數；因這 $z = g(v)$ 為向右平移 4 單位的新函數，新函數可能是平行向左移或向右移若干單位，再將其還原即可。

(1h) 由 $v = x - x_0$，得 $x = v + x_0 = v - 4$，將 $g(v)$ 還原成 $g(v-4)$ 的原函數，應用綜合除法，將 $g(v) = 2v^5 - 37v^4 + 238v^3 - 615v^2 + 544v - 26$ 連續除以 $v - 4$，得

2	-37	+238	-615	+544	-26	4
	8	-116	488	-508	+144	
2	-29	+122	-127	+36	+118	
	8	-84	+152	+100		
2	-21	+38	+25	+136		
	8	-52	-56			
2	-13	-14	-31			
	8	-20				
2	-5	-34				
	8					
2	3					

$$g(v-4)=2(v-4)^5+3(v-4)^4-34(v-4)^3-31(v-4)^2+136(v-4)+118$$

再將 $v-4$ 轉換成 x，即得到滿足原來 6 個數據點的原多項式函數 $f(x)$；

$$f(x)=2x^5+3x^4-34x^3-31x^2+136x+118$$

這是應用連續綜合除法與函數圖形平移法所演示操作出的正確原多項式函數。

(1i) 現在應用牛頓插值公式法來驗證：

由已知數據點的橫式原型均差運算表：

x：	−4		−2		−1		2		3		5	
y：	−26		−22		−14		106		58		3898	
1 階：		2		8		40		−48		1920		
2 階：			2		8		−22		656			
3 階：				1		−6		113				
4 階：					−1		17					
5 階：						2						

得 $f(x)=-26+2(x+4)+2(x+4)(x+2)+1(x+4)(x+2)(x+1)-1(x+4)$
$(x+2)(x+1)(x-2)+2(x+4)(x+2)(x+1)(x-2)(x-3)$

將上列多項式乘開，同次數項化簡，組合，再按高低次數排列，最後得；

$$f(x)=2x^5+3x^4-34x^3-31x^2+136x+118$$

此應用牛頓插值公式法過程嚴謹地驗證出完全相同的美善結果。

[2] 若平面坐標上已知數據點依序排列為：(4,1) , (5,4) , (6, 15) , (7, 46) , (8, 85) , (9, 456) 等 6 個數據點，沒有$(0,a_0)$點，試找出一個 5 次數多項式函數 $y=f(x)$的曲線通過這些點？將原數據點$(x,f(x))$假設為新數據點$(v,g(v))$，使 $v_i=x_i-x_0$ $(0\le i\le n)$，且 $g(v_i)=y_i=f(x_i)$，形成一新構的多項式函數 $z=g(v)=\sum_{t=0}^{n}b_t v^t$，而 $b_n=a_n$。再編製出此試驗性多項式函數 z 的橫式均差運算表，如下：

(2a) 整合編製出複合的原型與試驗性多項式函數 z 的橫式均差運算表；

x：	4		5		6		7		8		9
v：	0		v_1		v_2		v_3		v_4		v_5
v：	0		1		2		3		4		5
z：	$1=b_0$		4		15		46		85		456
1 階：		3		11		31		39		371	

2 階：　4　10　4　166

3 階：　2　-2　54

4 階：　-1　14

5 階：　$3=b_5$

由表格中可得出；　$b_5=a_5=3$ ，$b_0=1$ 。

(2b) 作出降 1 次數的 $p_1=p_1(v)=\sum_{t=1}^{n} b_t v^{t-1}$ 多項式函數的均差運算表，將上述多項式函數 z 橫式均差運算表中 1 階、2 階、3 階、4 階、5 階等各階的第 1 項數值 3、4、2、-1、3 依序置放於此降 1 次數的 $p_1(v)$ 均差運算(局部)表中 p_1 列、1 階、2 階、3 階、4 階等列的第 2 項位置處，並逆推運算做成降 1 次數局部列表：

v：　0　1　2　3　4　5

p_1：　$81=b_1$　3

1 階：　-78　4

2 階：　41　2

3 階：　-13　-1

4 階：　$3=b_5$　$3=b_5$

在此逆推運算過程可得到；　$b_1=81$ 。

(2c) 作出降 2 次數的 $p_2=p_2(v)=\sum_{t=2}^{n} b_t v^{t-2}$ 多項式函數均差運算表，如下；

將上述(2b).節的 $p_1=p_1(v)$ 運算表中 1 階、2 階、3 階、4 階等各階的第 1 項數值 -78、41、-13、3 依序置放於此降 2 次數的 $p_2(v)$ 均差運算(局部)表中 p_2 列、1 階、2 階、3 階等列的第 2 項位置處，並逆推運算做成降 2 次數局部列表：

v：　0　1　2　3　4　5

p_2：　$-163=b_2$　-78

1 階：　85　41

2 階：　-22　-13

3 階：　3　3

在此逆推運算過程可得到；　$b_2=-163$ 。

(2d) 作出降 3 次數的 $p_3 = p_3(v) = \sum_{t=3}^{n} b_t v^{t-3}$ 多項式函數均差運算表；將上述(2c).節的 $p_2 = p_2(v)$ 運算表中 1 階、2 階、3 階等各階的第 1 項數值 85、-22、3、依序置放於此降 3 次數的 $p_3(v)$ 均差運算(局部)表中 p_3 列、1 階、2 階等列的第 2 項位置處，並逆推運算做成下述降 3 次數的 $p_3(v)$ 均差運算局部列表：

v：	0	1	2	3	4	5
p_3：	$113 = b_3$	85				
1 階：	-28	-22				
2 階：		3	3			

在此逆推運算過程可得到；　$b_3 = 113$　。

(2e) 作出降 4 次數的 $p_4 = p_4(v) = \sum_{t=4}^{n} b_t v^{t-4}$ 多項式函數均差運算表；將上述(2d).節的 $p_3 = p_3(v)$ 運算表中 1 階、2 階等各階的第 1 項數值 -28、3、依序置放於此降 4 次數的 $p_4(v)$ 均差運算(局部)表中 p_4 列、1 階等列的第 2 項位置處，並逆推運算做成下述降 4 次數的 $p_4(v) = b_5 v + b_4$ 多項式函數均差運算局部列表：

v：	0	1	2	3	4	5
p_4：	$-31 = b_4$	-28				
1 階：	3	3				

在此逆推運算過程可得到；　$b_4 = -31$　。

(2f). 由逆推均差運算過程，直接得出的試驗性多項式函數 $z = g(v) = \sum_{t=0}^{n} b_t v^t$ 為 $z = g(v) = 3v^5 - 31v^4 + 113v^3 - 163v^2 + 81v + 1$，此多項函數 z 並非滿足已知數據點的多項式函數，需要再透過函數圖形平移法操作以轉換成正確多項函數；因這 $z = g(v)$ 為向左平移 4 單位的新函數，新函數可能是平行向左移或向右移若干單位，再將其還原即可。

(2g) 由 $v = x - x_0$，得 $x = v + x_0 = v + 4$，將 $g(v)$ 還原成 $g(v+4)$ 的原函數，應用綜合除法，將 $g(v) = 3v^5 - 31v^4 + 113v^3 - 163v^2 + 81v + 1$ 連續除以 $v+4$，得 $g(v+4) = 3(v+4)^5 - 91(v+4)^4 + 1089(v+4)^3 - 6415(v+4)^2 + 18585(v+4) - 21171$ 再將 $v+4$ 轉換成 x，即得到滿足原來 6 個數據點的原多項式函數 $f(x)$；

$$f(x) = 3x^5 - 91x^4 + 1089x^3 - 6415x^2 + 18585x - 21171$$

這是應用連續綜合除法與函數圖形平移法所演示操作出的正確原多項式函數。

(2h) 現在應用牛頓插值公式法來驗證：

由已知數據點的橫式原型均差運算表：

x：　4　5　6　7　8　9

y：　1　4　15　46　85　456

1 階：　3　11　31　39　371

2 階：　4　10　4　166

3 階：　2　-2　54

4 階：　-1　14

5 階：　$3 = a_5$

得　$f(x) = 1 + 3(x-4) + 4(x-4)(x-5) + 2(x-4)(x-5)(x-6) - 1(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) + 3(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)$

將上列多項式乘開，分別取同次數項化簡，組合，再按高低次數排列，這個過程需要費盡很大一番計算工程，最後得；

$$f(x) = 3x^5 - 91x^4 + 1089x^3 - 6415x^2 + 18585x - 21171$$

此應用牛頓插值公式法過程嚴謹地驗證出完全相同的運算結果。

[3] 若已知有數據點依序排列為：$(-3,-21)$，$(-1,-7)$，$(2, 119)$，$(4,133)$，$(5, 659)$，等 5 個點，沒有$(0, a_0)$點，試想要找出一個 4 次數多項式函數 $f(x)$ 的曲線通過這些點，採取本法的操作流程如下：

(3a) 原型的 x 值是 -3、-1、2、4、5，現在，直接就將它們看成是另一變數 v 的 0、2、5、7、8，而函數值 $z = g(v)$ 依舊維持原來的數值，得複合型表如下；

x：　-3　-1　2　4　5

y：　-21　-7　119　133　659

v：　0　2　5　7　8

$g(v)$：　-21　-7　119　133　659

1 階：　7　42　7　526

2 階：　7　-7　173

3 階：　-2　3

4 階：　4

(3b) 仿效正文的操作模式，作出降 1 次數函數 $p_1(v)$ 的差分運算表(局部表)；

v：　0　2　5　7　8

$p_1(v)$：　-307　7

1 階：　157　7

2 階：　-30　-2

3 階：　4　4

(3c) 繼續作出降 2 次數函數 $p_2(v)$ 的差分運算表(局部表)；

v：　0　2　5　7　8

$p_2(v)$：　257　157

1 階：　-50　-30

2 階：　4　4

(3d) 再作出降 3 次數函數 $p_3(v)$ 的差分運算表(局部表)；

v：　0　2　5　7　8

$p_3(v)$：　-58　-50

1 階：　4　4

完成這所有新定的均差運算表，得出；$b_4 = 4$、$b_3 = -58$、$b_2 = 257$、$b_1 = -307$、$b_0 = -21$　。則因此得到新構的試驗性多項式函數為下述的 $g(v)$；

$g(v) = 4\,v^4 - 58\,v^3 + 257\,v^2 - 307\,v - 21$　，$g(v)$ 為向右平移 3 單位的新函數。

(3e) 將 $g(v)$ 還原成 $g(v-3)$ 的原函數，就應用綜合除法，得到下列轉換函數；

$$g(v-3) = 4\,(v-3)^4 - 10\,(v-3)^3 - 49\,(v-3)^2 + 101\,(v-3) + 129$$

再將 $v-3$ 轉換成 x ，即得到滿足原來 5 個數據點的原多項式函數 $f(x)$；

$f(x) = 4\,x^4 - 10\,x^3 - 49\,x^2 + 101\,x + 129$

這是應用函數圖形平移法所演示操作出的原多項式函數。(不再驗證)

F. **若已知有 $(0, a_0)$ 數據點**，就先將此 $(0, a_0)$ 點移至數據表列的首項位置，然後直接編製出所有均差運算表，再直接取出運算表中每一個常數值，即可得到適配的多項式函數而不需要再做轉換的程序；請看下個範例：

[4] 若已知有數據點依序排列為：$(-3,-15)$, $(-1,-5)$, $(0,6)$, $(2, 130)$, $(5, 2281)$，等 5 個點，有$(0, a_0)$點，要找出一個 4 次多項式函數 $f(x)$的曲線通過這些點。

(4a) 先將此$(0, a_0)$點移至數據表列的首項位置，然後直接編製出均差運算表：

x：	0		-3		-1		2		5
y：	$6 = a_0$		-15		-5		130		2281
1 階：		7		5		45		717	
2 階：			2		8		112		
3 階：				3		13			
4 階：					$2 = a_4$				

(4b) 仿效正文的操作模式，作出降 1 次數函數 $D_1(x)$的差分運算表(局部表)；

x：	0		-3		-1		2		5
D_1：	10		7						
1 階：		1		2					
2 階：			-1		3				
3 階：				2		2			

(4c) 繼續作出降 2 次數函數 $D_2(x)$ 的差分運算表(局部表)；

x：	0		-3		-1		2		5
D_2：	4		1						
1 階：		1		-1					
2 階：			2		2				

(4d) 再作出降 3 次數函數 $D_3(x)$的差分運算表(局部表)；

x：	0		-3		-1		2		5
D_3：	7		1						
1 階：		2		2					

完成這所有均差運算表，得出；$a_4 = 2$、$a_3 = 7$、$a_2 = 4$、$a_1 = 10$、$a_0 = 6$ 。此處不須做任何轉換，則因此得到滿足原來 5 個數據點的原多項式函數 $f(x)$；

$$f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 4x^2 + 10x + 6$$

(4e) 現在應用牛頓插值公式法來驗證：

由已知數據點的橫式原型均差運算表為(4a).節的完整全副表格，選用牛頓插值公式法得

$$f(x) = 6+7x+2x(x+3)+3x(x+3)(x+1)+2x(x+3)(x+1)(x-2)$$

$$= 2x^4+7x^3+4x^2+10x+6$$

果然真實驗證出完全相同的運算結果。

因此，已知有$(0, a_0)$數據點存在時，僅須直接編製出如上述連續多個的原型與降各次數均差運算表，且直接取出每一表格中的第 1 項數值，即可快速求得滿足原來所有數據點的原多項式函數。

參、結論

[1] 主題論述的軸心是：以虛擬數據點$(0, b_0)$為首的新排列數據點構建成新試驗性多項式函數 $z = g(v) = \sum_{t=0}^{n} b_t v^t$ ，並以配合實際計算編列出的均差運算表來逆向推演計算出常數項數值、1 次項係數數值、2 次項係數數值、3 次項係數數值、⋯ 至 n 次項係數數值。所有編製出來的逆推均差運算表是依著降各次數級多項式； $p_1 = \sum_{t=1}^{n} b_t v^{t-1}$ 、 $p_2 = \sum_{t=2}^{n} b_t v^{t-2}$ 、⋯、 $p_{n-1} = b_n v + b_{n-1}$ 的秩序規範而成，在比對連續相鄰的 2 運算表間相同數值位置的關聯，而領略出這一類逆推演算列表法。最後再取出 z 列、p_1 列、p_2 列、⋯、 p_{n-1} 列等各列第 1 項數值而組合成新試驗性多項式函數 z ，再應用函數圖形平移法將多項式函數 z 轉換成原多項式函數 f 。

[2] 由所有解說分析知，只要依據標準操作流程正確完整的連續編製出同系列各逆推均差運算局部表，即可順利取到諸表的所需對應列第 1 項數值而迅速組合完成新試驗性多項式函數。期間僅需作簡單的計算數字列表及連續綜合除法，無須再作多項式的乘加展開運算，是非常簡便、既有巧思又見創新、容易快捷上手的一種列表速算法。當已知有$(0, a_0)$數據點存在時，更見到解題的精簡。

[3] 本篇是一件自我發想的經驗創意作品，在長年教學期間歷經解惑、思索、追蹤、觀摩、比對、參考、實作試驗等累積的體驗薰陶，而觸發出的靈感著作；藉此專文特與先進同好們分享，並盼齊思斧正。

參考文獻

均差（Divided differences）：維基百科，自由的百科全書。

蔡聰明：多項函數的插值公式。**數學傳播季刊 157 期**(第 40 卷 1 期)，2016 年 3 月出版發行。

黃武雄：**中西數學簡史**。(1980)人間文化事業公司。

林聰源：**數學史----古典篇**。(1995)凡異出版社。

Louis Melville Milne-Thomson. The Calculus of Finite Differences. *American Mathematical Soc*. (2000). Chapter 1: Divided Differences [1933]. ISBN 978-0-8218-2107-7.

Myron B. Allen; Eli L. Isaacson. *Numerical Analysis for Applied Science*. John Wiley & Sons. 1998. Appendix A. ISBN 978-1-118-03027-1.

Ron Goldman. Pyramid Algorithms: *A Dynamic Programming Approach to Curves and Surfaces for Geometric Modeling*. Morgan Kaufmann. (2002). Chapter 4: Newton Interpolation and Difference Triangles. ISBN 978-0-08-051547-2

【完】