兩道複數幾何題的另解

連威翔

山城人力資源管理顧問有限公司(派遣至苗栗縣政府環境保護局)

壹、前言

回顧[1]中歷年的大學入學試題，我們可發現一些考題的設計同時引入了幾何與複數。例如在 108 年指定科目考試數學甲(底下簡稱 108 指考數甲)試題中，選填題 C 的敘述如下：

選填題 C：設 z 為複數。在複數平面上，一個正六邊形依順時針方向的連續三個頂點為 z、0、$z+5-2\sqrt{3}i$（其中 $i=\sqrt{-1}$），則 z 的實部為____________。（化成最簡分數）

關於上述問題，只要上網搜尋「108 年指考數甲選填題 C」這段關鍵字，即可找到不少各具特色的解法。在[2]的試題解析中，<u>張簡瑞璨</u>老師使用複數的相乘表示向量的旋轉來求解上述問題，<u>張簡</u>老師先依題意畫出下圖：

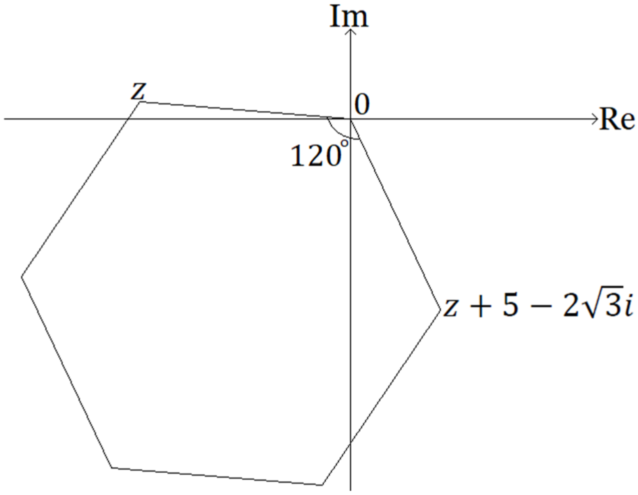

圖 1

再依上圖中 $z, z+5-2\sqrt{3}i$ 兩複數的關係寫下

$$z\times(\cos 120°+i\sin 120°)=z+5-2\sqrt{3}. \tag{1}$$

之所以能列出上式，是因為圖 1 中複數 z 所代表的向量(以原點為旋轉中心)逆時針旋轉 120° 後等於 $z+5-2\sqrt{3}$ 所代表之向量。利用(1)式解得 $z=-\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i$ 後，即得 z 的實部為 $-\frac{7}{2}$。

此外，[3]的解法同時使用向量的旋轉與伸縮來求解上述問題，但所使用的旋轉中心

並非圖 1 中的原點。而[4]中的解答則使用解析幾何的方式列出兩個長度關係來求解，此解法在最後會得到兩解，須另外判別何者符合題意。

除了上述的三種解法以外，底下第二節的內容將對上述試題介紹另兩種解法，希望能供有興趣的讀者參考。在接著的第三節中，則將介紹另一道也同時引入了幾何與複數的入學試題，並將仿照前兩節的內容進行類似的探討。

貳、選填題 C 的另解

對第一節中的選填題 C，此處介紹其第一個另解如下：

解法 1：在圖 1 中假設 $A(z), O(0), B\left(z+5-2\sqrt{3}i\right)$，並假設正六邊形的中心為 C。畫出連接 C 點與正六邊形各頂點的線段，再連接 $\overline{AB}$ 假設交 $\overline{OC}$ 於 D 點，如下圖：

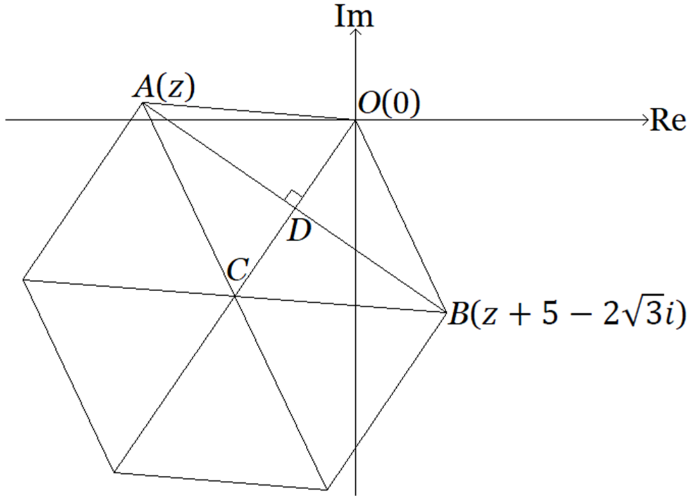

圖 2

注意上圖中 $\Delta CAO, \Delta CBO$ 為正三角形，因此 $\overline{OA}=\overline{AC}=\overline{CO}=\overline{OB}=\overline{BC}$，故四邊形 $OACB$ 為菱形，其對角線 $\overline{AB}, \overline{OC}$ 互相垂直平分。又因為 $\Delta AOD, \Delta BOD$ 皆為 $30°-60°-90°$ 三角形，可知

$$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}=(\overline{OA}+\overline{OB})\sin 60°=2\sin 60°\,\overline{OC}=\sqrt{3}\cdot\overline{OC}. \tag{2}$$

因為 $OACB$ 也是平行四邊形，故 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，因此 $\overrightarrow{OC}$ 所代表的複數是

$$z+\left(z+5-2\sqrt{3}i\right)=2z+5-2\sqrt{3}i.$$

注意在圖 2 的複數平面上 $\overrightarrow{AB}$ 所代表的複數是 $5-2\sqrt{3}i$，利用 $\overline{AB}$ 與 $\overline{OC}$ 互相垂直的條件配合(2)式中的長度關係，可知圖 2 中以點 O 為旋轉中心將 $\overrightarrow{OC}$ 逆時針旋轉 $90°$ 再將長度放大為 $\sqrt{3}$ 倍後所得的向量等於 $\overrightarrow{AB}$ (兩向量大小與方向相同)，可寫下

$$\left(2z+5-2\sqrt{3}i\right)\cdot\sqrt{3}(\cos 90°+i\sin 90°)=5-2\sqrt{3}i. \tag{3}$$

因為 $\cos 90° + i\sin 90° = i$，由上式可知

$$2z + 5 - 2\sqrt{3}i = \frac{5 - 2\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i} = -2 - \frac{5\sqrt{3}}{3}i,$$

因此可解得

$$z = -\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i,$$

從而確定 z 的實部為 $-\frac{7}{2}$，解題完畢。

上述解法與[3]中解法的共通點，是皆同時使用了向量的旋轉與伸縮來解題。兩者的不同之處，是上述解法在列出(3)式之前需先利用平面幾何與向量的知識進行一些討論，但[3]中的解法則是直接利用上方圖 2 中 $\overrightarrow{AB}$ (以點 A 為旋轉中心)逆時針旋轉 30° 再將長度縮小為 $1/\sqrt{3}$ 倍後等於 $\overrightarrow{AO}$ 的關係來解題。

接下來，我們看選填題 C 的第二個另解如下：

解法 2：同樣參考圖 2，令圖 2 中與 O 點距離最遠的正六邊形頂點為 E，連接 $\overline{AE}, \overline{BE}$ 之後，令與 A, B 兩點距離最遠的正六邊形頂點分別為 G, F，如下圖：

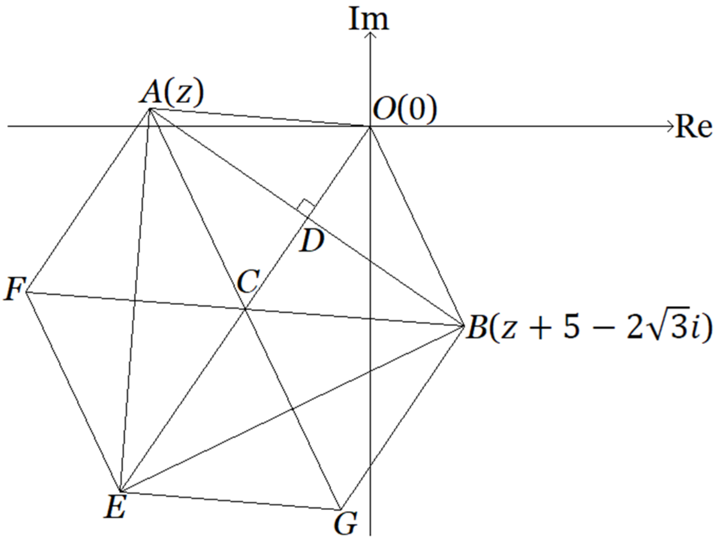

圖 3

注意在上方解法 1 的(2)式下方，提到 $\overrightarrow{OC}$ 所代表的複數是 $2z + 5 - 2\sqrt{3}i$，而圖 3 中有 $\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OC}$，因此 $\overrightarrow{OE}$ 所代表的複數為 $4z + 10 - 4\sqrt{3}i$。此外，$\overrightarrow{AB}$ 所代表的複數是 $5 - 2\sqrt{3}i$。

圖 3 中由於正六邊形 $OAFEGB$ 之各邊等長且各內角相等，利用 SAS 全等性質可證明 $\Delta AOB, \Delta BGE, \Delta EFA$ 兩兩全等，因此 $\overline{AB} = \overline{BE} = \overline{EA}$，故 ΔABE 為正三角形，得 $\angle BAE = 60°$ 的

條件。注意

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OE}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE},$$

因此可計算 $\overrightarrow{AE}$ 所代表的複數如下：

$$-z+4z+10-4\sqrt{3}i=3z+10-4\sqrt{3}i.$$

注意圖 3 中以點 A 為旋轉中心將 $\overrightarrow{AB}$ 順時針旋轉 $60°$ 後的結果就是 $\overrightarrow{AE}$，此關係可用複數表示如下：

$$\left(5-2\sqrt{3}i\right)\cdot[\cos(-60°)+i\sin(-60°)]=3z+10-4\sqrt{3}i, \tag{4}$$

注意順時針旋轉時的角度要取負值。由上式可知

$$3z+10-4\sqrt{3}i=\left(5-2\sqrt{3}i\right)(\cos 60°-i\sin 60°)=\left(5-2\sqrt{3}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\sqrt{3}i,$$

因此可解得

$$z=-\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i,$$

故 z 的實部為 $-\frac{7}{2}$，解題完畢。

眼尖的讀者，應該已看出解法 2 的精神基本上與[2]中的解法相同，皆使用向量的旋轉但不搭配伸縮來解題。其中，解法 2 考慮的是圖 3 中 $\overrightarrow{AB}$ 順時針旋轉 $60°$ 後為 $\overrightarrow{AE}$，而[2]中的解法則是考慮圖 2 中 $\overrightarrow{OA}$ 逆時針旋轉 $120°$ 後為 $\overrightarrow{OB}$，兩者分別以點 A,O 為旋轉中心。

本節最後，回顧上方介紹的兩個另解並與[2]中的解法做比較，不難發現仍以[2]中的解法較為簡單。不過值得一提的是，解法 1 的(3)式以及解法 2 的(4)式皆僅在等號的單側與 z 有關，而在本文第一節中簡介之[2]的解法，則在(1)式的等號兩側都與 z 有關。所以說，雖然解法 1 與解法 2 在列出關鍵的(3)式與(4)式之前都經過較多的鋪陳，但在(3),(4)兩式後的計算會比(1)式來得簡單。

參、看看另一道考題

本節將介紹另一道入學考題，是 101 年學科能力測驗的多選題 10，其敘述如下：

多選題 10：設 O 為複數平面上的原點，並令點 A,B 分別代表複數 z,w。若 $\angle AOB=90°$，則下列哪些選項必為負實數？

(1) $\frac{z}{w}$

(2) zw

(3) $(zw)^2$

(4) $\frac{z^2}{w^2}$

(5) $(z\overline{w})^2$ （其中 $\overline{w}$ 為 w 的共軛複數）

此問題的出處，同樣請參考[1]。

不難發現，上述多選題 10 與第一節的選填題 C 皆同時引入了複數與幾何的元素。由多選題 10 中 $\angle AOB = 90°$ 的條件知 $\overline{OA} \perp \overline{OB}$，此時 $\overline{OA}, \overline{OB}$ 的長度均不為 0，因此 $|z|, |w|$ 皆大於 0。在網路上搜尋「101 年學測數學多選題 10」這段關鍵字後，我們也可找到不少解法，其中[2]的解法認為上述問題各選項的數是否必為負實數並不會受到 $|z|, |w|$ 兩正數的大小影響，因此不失一般性，對原問題只考慮 $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$ 的情形，並假設

$$z = \cos\alpha + i\sin\alpha, \qquad w = \cos\beta + i\sin\beta,$$

其中 $\alpha - \beta = \pm 90°$，然後再進行求解。而筆者研究上述問題過後，在更一般的條件下找出了一個另解，在此提供給讀者參考如下：

解答：依題意知 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 兩者夾角為 $90°$，因此 z, w 兩複數均非零，這包含下方示意圖中的兩種情形：

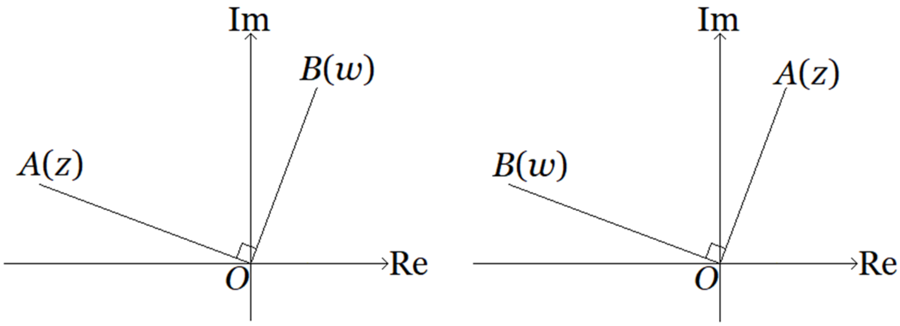

圖 4

在圖 4 左邊的情形，複數 w 代表的 $\overrightarrow{OB}$ 以 O 為旋轉中心逆時針旋轉 $90°$ 後與複數 z 代表的 $\overrightarrow{OA}$ 同向，因此存在實數 r 滿足

$$z = r(\cos 90° + i\sin 90°)w = irw, \tag{5}$$

其中 r 為 $\overline{OA}, \overline{OB}$ 的長度 $|z|, |w|$ 之比值，滿足 $r = \frac{|z|}{|w|} > 0$，此結果也可透過對 $z = irw$ 的等號兩側同時取絕對值所得之 $|z| = r|w|$ 來確定。而對於圖 4 右邊的情形，我們可寫下

$$z = r[\cos(-90°) + i\sin(-90°)]w = r(\cos 90° - i\sin 90°)w = -irw, \tag{6}$$

其中 r 同樣為 $\overline{OA}, \overline{OB}$ 的長度 $|z|, |w|$ 之比值，且同樣滿足 $r = \frac{|z|}{|w|} > 0$。

此時，對於原本多選題 10 的第 1 個與第 4 個選項，利用(5), (6)兩式可知

$$\frac{z}{w} = ir \quad \text{或} \quad -ir,$$

因上式等號右邊的兩可能值均為虛數，故第 1 個選項錯誤；又由上式可知

$$\frac{z^2}{w^2} = \left(\frac{z}{w}\right)^2 = (\pm ir)^2 = -r^2, \tag{7}$$

因上式最後所得之值為負實數，故第 4 個選項正確。而對於第 2 個與第 3 個選項，利用(5), (6)兩式可知

$$zw = irw^2 \quad \text{或} \quad -irw^2,$$

以 $w = 1$ 代入上式後可知 zw 的兩可能值均為虛數，故第 2 個選項錯誤；又由上式可知

$$(zw)^2 = (\pm irw^2)^2 = -r^2w^4, \tag{8}$$

若取 $w = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$，則有

$$w^4 = (\cos 45° + i\sin 45°)^4 = \cos 180° + i\sin 180° = -1,$$

因此以 $w = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ 代入(8)式後，可得 $(zw)^2 = r^2$，由於 r^2 為正數，故第 3 個選項錯誤。

至於第 5 個選項，注意任意複數 u 滿足 $u\bar{u} = |u|^2$，因此配合(7)式的計算結果，我們可求得

$$(z\bar{w})^2 = \left(\frac{z}{w}\cdot w\bar{w}\right)^2 = \left(\frac{z}{w}|w|^2\right)^2 = \left(\frac{z}{w}\right)^2|w|^4 = -r^2|w|^4,$$

因上式最後所得之值為負實數，故第 5 個選項正確。

依據上述的討論結果，可知多選題 10 應選(4), (5)兩個選項。回顧張簡老師在[2]中的解法，他考慮 $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$ 的情形，這在上面的解法就對應到 $|z| = |w| = 1$，因此有 $r = 1$。我們會發現，在上面的解題過程中取 $r = 1$ 後並不影響各選項的算式值是否必為負實數的判斷結果，因此不會改變最後的解答，這應該就是[2]中的解法考慮 $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$ 的原因。

肆、結語

本文介紹了兩道入學考題的另解，讀者閱讀過後，應能感受到「找出問題另解」的樂趣。在我們學習數學的過程中，行有餘力之時，若能試著找出某些問題的另解，相信不但是很好的練習，同時也能增加學習的樂趣。

感謝審稿者對本文給出許多中肯且立意良善的建議，尤其第三節多選題 10 的解法，那是筆者參考審稿者之建議將原解法簡化後所得的結果。本文最後，筆者想再多介紹一道入學考題，那是 108 年學測數學的選填題 G，其解法同樣可參考[2]。該問題是一道平面向量問題，讀者若有興趣，不妨試著改用複數工具找出其另解(筆者已自行解出)，相信會是很有趣的一個練習。

參考文獻

學科能力測驗與分科測驗(110 前指考)歷年試題，大學入學考試中心
https://www.ceec.edu.tw/
歷屆學測與指考數學試題解析，三民東大數學學習網
https://elearning.sanmin.com.tw/Learn/PreviousTest/Math
【108 年指考數甲】11 選填 C，高明一對一文理補習班
https://www.youtube.com/watch?v=UpxYg6PGDek
108 年大學指考數學甲詳解，朱氏幸福
https://chu246.blogspot.com/2019/07/108_8.html