用「歐拉線定理」看三角形外心面積比

陳建燁

壹、前言

問題的來龍去脈是這樣的：大家都知道，三角形的重心與三頂點的連線，將三角形分成三個面積相等的三角形。在劉俊傑老師的「換個觀點看三角形的四心」(參考資料[1])一文中，對於垂心與外心將三角形所分成的面積比都作了討論。首先討論的是垂心，所得公式為：

「設 H 為銳角 ΔABC 的垂心，則 $\Delta ABH:\Delta BCH:\Delta CAH$ $=(c^4-a^4+2a^2b^2-b^4):(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4):(b^4-c^4+2c^2a^2-a^4)$」(其中 ΔABH 表示 ΔABH 的面積，而 $a=\overline{BC}$)。以此公式，給出並解決了一道題目：

「設 H 為銳角 ΔABC 的垂心，且 $\Delta ABH:\Delta BCH:\Delta CAH=1:2:3$，求 ΔABC 三邊長的比例值，即 $a:b:c=$？」本質上，這個問題也可以理解為，給定「垂心將三角形分成的三個三角形的面積比」，倒過來反求原來三角形的三邊長之比。對於此一問題，連威翔先生在[2]中給出了另證，引發筆者對此問題的興趣，進而在[3]中，給出了一般性的結論：

「設 H 為銳角 ΔABC 的垂心，且 $\Delta BCH:\Delta CAH:\Delta ABH=P:Q:R$，則 $a:b:c$ $=\sqrt{P(Q+R)}:\sqrt{Q(R+P)}:\sqrt{R(P+Q)}$」。

同樣地，對於外心而言，[1]也給出公式：

「設 O 為銳角 ΔABC 的外心，則 $\Delta ABO:\Delta BCO:\Delta CAO$ $=a^2c^2+b^2c^2-c^4:a^2b^2+a^2c^2-a^4:a^2b^2+b^2c^2-b^4$。」以此公式，給出並解決了一道題目：「設 O 為銳角 ΔABC 的外心，且 $\Delta ABO:\Delta BCO:\Delta CAO=2:1:1$，求 ΔABC 三邊長的比例值，即 $a:b:c$ $=$？」本質上，同樣是由「外心將三角形所分成的面積比」，倒過來求原來三角形三邊長的比。相對地，該文並未就一般情形作討論，問題可敘述為：

「設 O 為銳角 ΔABC 的外心。設 $\Delta OBC:\Delta OCA:\Delta OAB=p:q:r$，則 $a:b:c=$？」關於此問題，連威翔先生告知筆者他用向量法推導出如下關於外心與垂心的面積關係：「在銳角三角形 ABC 中，設垂心為 H，外心為 O，則有 $\Delta ABH+\Delta ACH=2\Delta BOC$。」而在本篇文章中，筆者將運用平面幾何中聞名遐邇的「歐拉線定理」，給出上述外心與垂心面積關係($\Delta ABH+\Delta ACH=2\Delta BOC$)的一個純幾何證明。進一步地，再用此一等式，推導出由外心所

分面積比反求三角形原三邊長比的一般情形的結論：

「設 O 為銳角 ΔABC 的外心。設 $\Delta OBC:\Delta OCA:\Delta OAB=p:q:r$，則 $a:b:c=$ $=\sqrt{p(q+r-p)}:\sqrt{q(r+p-q)}:\sqrt{r(p+q-r)}$。」

貳、本文

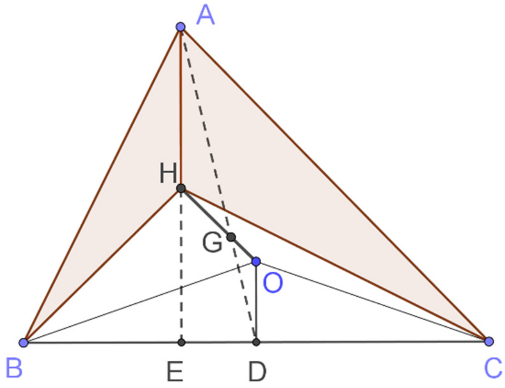
一、已知定理：

歐拉線定理：任意三角形的垂心 H、重心 G 和外心 O，三點共線，且 $\overline{HG}=2\overline{GO}$。 (參考資料[4])

二、外心與垂心的面積關係：

定理：在銳角三角形 ABC 中，設垂心為 H，外心為 O，則有 $\Delta ABH+\Delta ACH=2\Delta BOC$。

證明：



首先，設三角形 ABC 的重心為 G，D 為 $\overline{BC}$ 的中點，已知有 A、G、D 三點共線，且 $\overline{AG}:\overline{GD}=2:1$。

又由歐拉線定理，有 H、G、O 三點共線，且 $\overline{HG}:\overline{GO}=2:1$。

注意到 $\angle AGH=\angle DGO$（對頂角相等），且 $\overline{AG}:\overline{GD}=2:1=\overline{HG}:\overline{GO}$，可得 $\Delta AGH\sim\Delta DGO$ (S.A.S.相似)，於是有 $\overline{AH}:\overline{OD}=\overline{HG}:\overline{GO}=2:1$。

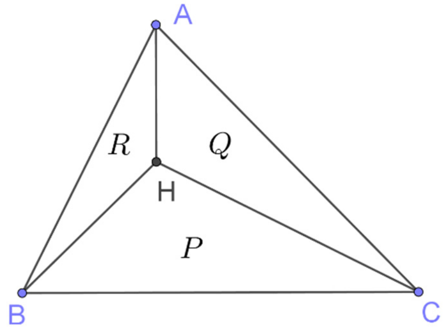
接著，設 H 在 $\overline{BC}$ 上的垂足為 E，

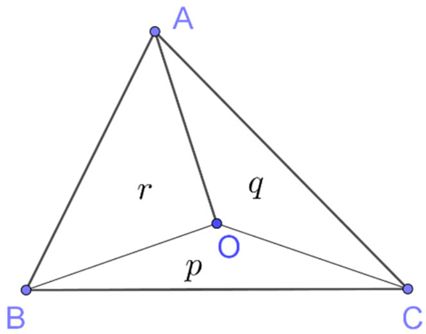
則 $$\frac{\Delta ABH+\Delta ACH}{\Delta BOC}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AH}\times\overline{BE}+\frac{1}{2}\overline{AH}\times\overline{CE}}{\frac{1}{2}\overline{OD}\times\overline{BC}}=\frac{\overline{AH}\times(\overline{BE}+\overline{CE})}{\overline{OD}\times\overline{BC}}=\frac{\overline{AH}\times\overline{BC}}{\overline{OD}\times\overline{BC}}$$

$=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{OD}}=\dfrac{2}{1}$，所以有 $\Delta ABH+\Delta ACH=2\Delta BOC$。

三、舉一反三：

在銳角三角形 ABC 中，設垂心為 H，外心為 O。令 $\Delta BCH=P$，$\Delta CAH=Q$，$\Delta ABH=R$；$\Delta BOC=p$，$\Delta COA=q$，$\Delta AOB=r$，如下圖所示：





到目前為止，我們已證 $\Delta ABH+\Delta ACH=2\Delta BOC$ ，即 $Q+R=2p$ 。同理亦可證，有 $R+P=2q$ 與 $P+Q=2r$ ，

即 $\begin{cases} P+Q=2r \\ Q+R=2p \\ R+P=2q \end{cases}$ ，

以 $P+Q+R=\Delta ABC=p+q+r$ 減去上列三式，

即可得 $\begin{cases} P=q+r-p \\ Q=p+r-q \\ R=p+q-r \end{cases}$ ，

至此，得到了 P,Q,R 與 p,q,r 的轉換公式。

四、由垂心邊長比推得外心邊長比：

我們來看文章開頭提到的問題：

「設 O 為銳角 ΔABC 的外心。設 $\Delta OBC:\Delta OCA:\Delta OAB=p:q:r$ ，則 $a:b:c=?$ 」

處理如下：

首先，在三角形 ABC 中，因為 $\Delta OBC:\Delta OCA:\Delta OAB=p:q:r$ ，所以可令 $\Delta BOC=pt$ ，$\Delta COA=qt$ ， $\Delta AOB=rt$ 。

接著，設 H 為銳角 ΔABC 的垂心，令 $\Delta BCH=P$ ， $\Delta CAH=Q$ ， $\Delta ABH=R$ ，由參考資料[3]，已知如下結果：

「設 H 為銳角 ΔABC 的垂心，且 $\Delta BCH:\Delta CAH:\Delta ABH=P:Q:R$，則 $a:b:c$

$=\sqrt{P(Q+R)}:\sqrt{Q(R+P)}:\sqrt{R(P+Q)}$」。

再來，由上述的外心與垂心的面積轉換公式，有 $\Delta ABH+\Delta ACH=2\Delta BOC$，可得

$$\begin{cases} P+Q=2rt \\ Q+R=2pt \\ R+P=2qt \end{cases} \text{ 與 } \begin{cases} P=(q+r-p)t \\ Q=(p+r-q)t \\ R=(p+q-r)t \end{cases},$$

於是可得

$$a:b:c=\sqrt{P(Q+R)}:\sqrt{Q(R+P)}:\sqrt{R(P+Q)}$$

$$=\sqrt{(q+r-p)t\cdot 2pt}:\sqrt{(p+r-q)t\cdot 2qt}:\sqrt{(p+q-r)t\cdot 2rt}$$

$$=\sqrt{p(q+r-p)}:\sqrt{q(p+r-q)}:\sqrt{r(p+q-r)},$$

至此，得到三角形的原三邊邊長比。

五、應用：

不妨看看參考資料[1]中的一道題目：「設 O 為銳角 ΔABC 的外心，且 $\Delta ABO:\Delta BCO:\Delta CAO=2:1:1$，求 ΔABC 三邊長的比例值，即 $a:b:c=$？」

在此解答如下：

由 $\Delta BOC:\Delta COA:\Delta AOB=1:1:2$，可令 $\Delta BOC=t$，$\Delta COA=t$，$\Delta AOB=2t$。

設 H 為銳角 ΔABC 的垂心，令 $\Delta BCH=P$，$\Delta CAH=Q$，$\Delta ABH=R$。

由以上論述的外心與垂心的面積轉換公式，有 $R=\Delta ABH=\Delta BOC+\Delta COA-\Delta AOB=t+t-2t=0$，表示垂心 H 落在 $\overline{AB}$ 上，可得 A、H、B 三點共線，又因為 $\overline{AH}$ 和 $\overline{BC}$ 垂直，所以 $\overline{AB}$ 也和 $\overline{BC}$ 垂直，推得 $\angle B=90°$，但題目假設三角形 ABC 為銳角三角形，至此出現矛盾，由此可知，題目所假設的銳角三角形，其實是不存在的！

參、結語

回顧本篇文章的工作，主要是透過歐拉線與相似三角形的骨架結構，對於外心與垂心將三角形分成的面積之間的關係式：$\Delta ABH+\Delta ACH=2\Delta BOC$，給出一個純粹平面幾何的證法，並進而由已知的垂心面積比與邊長比的轉換公式，得到外心面積比反推邊長比的公式。

在此特別感謝用向量法推導並告知筆者此一關係式($\Delta ABH+\Delta ACH=2\Delta BOC$)的連威翔先生，促成了本篇文章的出現，也讓外心與垂心的關聯性得以浮現。

參考資料

劉俊傑。換個觀點看三角形的四心。數學傳播，30 卷 2 期，p28～39，2006。
連威翔。一道面積比公式的另證。數學傳播，42 卷 1 期，p80～84，2018。
陳建燁。「一道面積比公式的另證」的回響：用三角形的 A.S.A.面積公式。數學傳播，43 卷 1 期，p74～79，2019。
黃家禮。幾何明珠。九章出版社。p119，2000。