以新增數據點(0,?)及逆推均差運算列表法直取多項式函數(上)

李輝濱

嘉義市私立輔仁中學退休教師

壹、前言

多項函數的插值問題;即在直角坐標平面上透過實驗紀錄完成的 $n+1$ 個觀測數據點,試想要找出一個 n 次多項式函數的曲線通過這些點,並歸納出所有數據間的規律性以預測未來形勢。歷史上探討這類數值理論來解決多項函數的插值問題者首推自然哲學家牛頓(Isaac Newton)與拉格朗日(Joseph-Louis Lagrange)兩人,他們各自對插值多項函數作分析、比對,再應用因式定理與餘式定理的內涵特質作連結整合,分別得證出各自獨有的插值公式法(參考文獻 2.、3.、8.、9.)。

本文章與另一篇名:以均差運算列表法及函數圖形平移法求取多項式函數 的文體內容有所不同,但有關聯性。本文章是在給定的已知數據點中沒有數據點(0,?),所以要採用增列(0,?)數據點,以幫助直取多項式函數。而另一篇(文獻 3)是應用圖形平移法幫助求取多項式函數,不須增列(0,?)數據點。特於此說明。

均差(Divided differences)是指函數裡(兩個函數值的差)與其(對應輸入元素的差)的比值,是函數在某一區間內的平均變化率的測度。本文要提出新思維的另類分析法;針對已知數據點先做均差運算並編製出其原型的均差計算表,在這原型的均差運算表內無法直接尋獲滿足所有已知數據點的多項式函數。所以,必須在此均差運算表的前緣新增一個數據點(0,?),因為新增數據點後仍然必要維持原來的多項式函數不變,就必須將原型的均差運算表內最末一列的數字填加於此新增的 0 數據點的最末一列,完成後再以追溯均差運算法分別就各階運算過程自最末列逆向逐一配型成較高一次數的多項式數值,逆向過程必是從最後一階的常數數列開始回溯逆向推演起,逐次配型升高到 1 次數、2 次數、3 次數、⋯、直到 n 次數為止,此 n 次數位置被配型出的數值就是這 n 次數多項式的常數項數值,這是第 1 階段的操作。接著 1 次數、2 次數、⋯等各次數項係數數值的階段操作流程盡在下列主文中詳盡敘明。在原理的證明中常頻繁應用 x^n 與 y^n 兩個單項式差值($x^n - y^n$)的因式以做為每一階段運算所需配型的關係式。在數據的均差計算列表中可發現到每一位置的運算式都是呈現項數型態有規律分佈的整式多項式,而不是凌亂麻煩的分式型態,這在推演分析過程中順利地降低了思考的複雜困難度,使得作逆推演繹與比對的過程變得更熟悉、輕快。

貳、本文

假定 $n+1$ 個數據點給出的函數為 $y=f(x)$，其各數據點依序排列為：

$$(x_0, f(x_0)),\ (x_1, f(x_1)),\ (x_2, f(x_2)),\ \cdots\ ,(x_{n-1}, f(x_{n-1})),\ (x_n, f(x_n))$$

這些數據點的均差 (Divided differences) 運算可以寫成下列型式(文獻 1.與 7.)：

$$f[x_i] = f(x_i) \quad \Leftrightarrow \quad [y_i] = y_i \qquad i \in \{0,1,2,3,\ \cdots\ ,n\} \quad ,$$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+j-1}, x_{i+j}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+j}] - f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}$$

$$, \quad i \in \{0,1,2,3,\ \cdots\ ,n-j\} \quad , \quad j \in \{1,2,3,\ \cdots\ ,n\}$$

若取定 $i=0$ ，則每一階第 1 項的詳細均差運算式必可表達成下列型式；

0 階運算：　$[y_0] = f(x_0) = y_0$

1 階運算：　$$[y_0, y_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

2 階運算：　$$[y_0, y_1, y_2] = \frac{[y_1, y_2] - [y_0, y_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

3 階運算：　$$[y_0, y_1, y_2, y_3] = \frac{[y_1, y_2, y_3] - [y_0, y_1, y_2]}{x_3 - x_0}$$

$\vdots$　　　　$\vdots$

n 階運算：　$$[y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n] = \frac{[y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n] - [y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

自第 2 階以後就看到了一連串的遞迴除法過程，為了使關聯的層層計算過程更加清楚，特以橫向表列形式來展示原型的均差演算過程與結果，詳情表列如下；

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
x_0 & & x_1 & & x_2 & & x_3 & \cdots & x_{n-2} & & x_{n-1} & & x_n \\
[y_0]=y_0 & & [y_1]=y_1 & & [y_2]=y_2 & & [y_3]=y_3 & \cdots & [y_{n-2}]=y_{n-2} & & [y_{n-1}]=y_{n-1} & & [y_n]=y_n \\
& [y_0,y_1] & & [y_1,y_2] & & [y_2,y_3] & & \cdots & & [y_{n-2},y_{n-1}] & & [y_{n-1},y_n] &
\end{array}$$

$$[\,y_0, y_1, y_2\,] \quad [\,y_1, y_2, y_3\,] \quad [\,y_2, y_3, y_4\,] \quad \cdots \quad [\,y_{n-2}, y_{n-1}, y_n\,]$$

$$[\,y_0, y_1, y_2, y_3\,] \qquad \cdots \qquad [\,y_{n-3}, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n\,]$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$[\,y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n\,]$$

接下來的文章敘述內容裡所呈現的演繹分析運算流程中必更頻繁的需要應用到下列 2 個基本性質----引理，以做為承續推理的橋樑，增益印證的功能；

一、數學基本性質---引理；

引理 1. $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + y \cdot x^{n-2} + y^2 x^{n-3} + \cdots + y^{n-3}x^2 + y^{n-2} \cdot x + y^{n-1})$ (L1)

[證明]：略。

引理 2. 若 $f(x)$ 是一元 n 次多項函數，則對 $y = f(x)$ 作區間 $x \to x_i$ 內的 1 階均差運算 $[\,y,\ y_i\,] = \sum_{k=0}^{n-1}\left[(x)^{n-1-k}(x_i)^k\right]$ 的充要條件為 $f(x) = x^n + c$ ，其中 c 為實數。

[證明]：(充分條件)：對 $y = f(x) = x^n + c$ 作區間 $x \to x_i$ 內的 1 階均差運算，得；

$$[\,y, y_i\,] = \frac{y_i - y}{x_i - x} = \frac{1}{x_i - x}\left\{\ [(x_i)^n + c] - [x^n + c]\ \right\} = \sum_{k=0}^{n-1}\left[(x)^{n-1-k}(x_i)^k\right] \qquad \text{(L2)}$$

(必要條件)：令 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ ，則

$$[\,y, y_i\,] = \sum_{t=1}^{n} a_t \left(\sum_{k=0}^{t-1} x^{t-1-k} x_i^{\,k}\right) = a_n \sum_{k=0}^{n-1}\left[(x)^{n-1-k}(x_i)^k\right] + a_{n-1}\sum_{k=0}^{n-2}\left[(x)^{n-2-k}(x_i)^k\right] + \cdots + a_2 \sum_{k=0}^{1}\left[(x)^{1-k}(x_i)^k\right] + a_1 = a_n x^{n-1} + (a_n x_i + a_{n-1})\,x^{n-2} + (a_n x_i^{\,2} + a_{n-1}x_i + a_{n-2})\,x^{n-3} + \cdots + (a_n x_i^{\,n-2} + a_{n-1}x_i^{\,n-3} + a_{n-2}x_i^{\,n-4} + \cdots + a_3 x_i + a_2)\ x + (a_n x_i^{\,n-1} + a_{n-1}x_i^{\,n-2} +$$

$a_{n-2}x_i^{\,n-3}+\cdots+a_3x_i^{\,2}+a_2x_i+a_1)$

又因 $[y,y_i]=\sum_{k=0}^{n-1}\left[(x)^{n-1-k}(x_i)^k\right]$ = $x^{n-1}+x_ix^{n-2}+\ x_i^{\,2}x^{n-3}+\cdots+x_i^{\,n-2}x+x_i^{\,n-1}$，先行比較

最高次項 x^{n-1}的係數，得 $a_n=1$；再比較次高次項 x^{n-2}的係數 $a_nx_i+a_{n-1}=x_i$ ，可得

$a_{n-1.}=0$ ；依次再比較後續各項係數，得知 $a_{n-1.}=a_{n-2}=a_{n-3}=\cdots=a_1=0$，因此，

$f(x)=\ x^n+a_0$ 。 再令 $a_{0.}=c$ ， 得 $f(x)=\ x^n+c$ 。

註明：在引理 2.中，(L2)式表示對函數 x^n+c 作一次均差運算後所獲得的 $n-1$ 次數新結構式。而必要條件表示對此$[y,y_i]$作一次反均差運算後所獲得的原始n次式結構式。

二、以新增數據點 (0,?) 及逆推均差運算列表法直取多項式函數

探尋平面坐標上已給定n+1 個數據點的一般項多項式函數必是先對給定的已知數據值排成一數列，然後依順序對相鄰兩數作均差實際運算並按序排列出每一計算的結果而完成第 1 階表列數字，接著進行第 2 階、第 3 階、…、第n階等陸續完成各階表列數字，以製作出橫式(或縱式)的原型均差實際運算表。

觀察完成的均差實際運算表，將見到某一階數值會出現常數數列或最末一階的唯一位置出現常數。本文就是以此常數作為萌芽種子逐步逆向追蹤均差運算的各階操作過程而回證出原函數的一般項多項式，整個推演流程必須依循標準操作演算程序 SOP 始能達成任務。以下就是 SOP 程序步驟的策略與方法；

A. 原型均差運算實作表範例：

首先就給定函數值數列作出一份均差運算表；假定平面坐標上已知各數據點依序排列為： (1, 2) , (3, 4) , (4, 11) , (7, 272) , (9, 826) ,(10, 1271) , (12, 2587) , (16, 7427) 等 8 個數據點，依照各階均差運算法則實際製作出其橫式原型均差運算表，詳細計算的數字結果按順序顯示排列如下；

x：	1	3	4	7	9	10	12	16
y：	2	4	11	272	826	1271	2587	7427

$[y_i, y_{i+1}]$： 1 7 87 277 445 658 1210

$[y_i, y_{i+1}, y_{i+2}]$： 2 20 38 56 71 92

$[y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, y_{i+3}]$： 3 3 3 3 3

持續連作 3 階運算就出現了常數數列，代表它是 3 次數的多項式函數。依序作出各階均差運算，持續到某階運算時會出現常數數列就完成了原型運算表製作。若此過程中不出現常數數列，即會持續運算到第 7 階的唯一數字，而此數字也必是常數，以此種子數字作逆運算法所求出的多項式必是個 7 次數的多項式函數。

B. 主題原理：

B1. 令 $y = f(x) = \sum_{t=0}^{n} a_t x^t$ 多項式滿足了下列給定的 $n+1$ 個數據點；$(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $\cdots$,$(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, $(x_n, f(x_n))$，對此多項式持續作 1 階、2 階、3 階、…、$n-1$階、n階的均差運算，得下列橫式的原型均差運算表；

x： x_0 x_1 x_2 $\cdots$ x_{n-1} x_n

y： $\sum_{t=0}^{n} a_t {x_0}^t$ $\sum_{t=0}^{n} a_t {x_1}^t$ $\sum_{t=0}^{n} a_t {x_2}^t$ $\cdots$ $\sum_{t=0}^{n} a_t {x_{n-1}}^t$ $\sum_{t=0}^{n} a_t {x_n}^t$

1 階：$\sum_{t=1}^{n} a_t (\sum_{i=0}^{t-1} {x_0}^{t-1-i} {x_1}^i)$ $\sum_{t=1}^{n} a_t (\sum_{i=0}^{t-1} {x_1}^{t-1-i} {x_2}^i)$ $\cdots$ $\sum_{t=1}^{n} a_t (\sum_{i=0}^{t-1} {x_{n-1}}^{t-1-i} {x_n}^i)$

2 階： $\sum_{t=2}^{n} a_t (\sum_{i+j+k=t-2} {x_0}^i {x_1}^j {x_2}^k)$ $\sum_{t=2}^{n} a_t (\sum_{i+j+k=t-2} {x_1}^i {x_2}^j {x_3}^k)$ $\cdots$

3 階： $\sum_{t=3}^{n} a_t (\sum_{i+j+k+l=t-3} {x_0}^i {x_1}^j {x_2}^k {x_3}^l)$ $\cdots$

4 階： $\sum_{t=4}^{n} a_t (\sum_{i+j+k+l+m=t-4} {x_0}^i {x_1}^j {x_2}^k {x_3}^l {x_4}^m)$ $\cdots$

5 階： $\sum_{t=5}^{n} a_t (\sum_{i+j+k+l+m+p=t-5} {x_0}^i {x_1}^j {x_2}^k {x_3}^l {x_4}^m {x_5}^p)$ $\cdots$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

$$n-3： \quad a_n \sum_{i=0}^{n-3} x_i \Big(\sum_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-3}=2} {x_0}^{k_0} {x_1}^{k_1} {x_2}^{k_2} \cdots {x_{n-3}}^{k_{n-3}} \Big) + a_{n-1} \Big(\sum_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-3}=2} {x_0}^{k_0} {x_1}^{k_1} {x_2}^{k_2} \cdots {x_{n-3}}^{k_{n-3}} \Big)$$

$+a_{n-2}(\sum_{i=0}^{n-3}x_i)+a_{n-3}$ $\cdots$

$n-2$ 階： $a_n(\sum_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-2}=2} x_0^{k_0}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_{n-2}^{k_{n-2}})+a_{n-1}(\sum_{i=0}^{n-2}x_i)+a_{n-2}$ $\cdots$

$n-1$ 階： $a_n(\sum_{i=0}^{n-1}x_i)+a_{n-1}$ $a_n(\sum_{i=1}^{n}x_i)+a_{n-1}$

n 階： a_n

最末列 n 階出現的數字是 a_n，此 a_n 即為這多項式首項 n 次數係數的數值。必須要仔細正確地計算出這原型均差運算表，接著就要應用表列各階的第 1 項數字。

B2. 在均差運算表的前緣新增一個數據點 $(0,a_0)$ ：

假設給定的 $n+1$ 個數據點裡無 $(0,a_0)$ 這個點，則新增這個數據點 $(0,a_0)$ 在均差運算表的最前緣，新增後並不改變原來多項式函數的內涵型態結構，再依循均差運算法將此新增點 $(0,a_0)$ 與原型均差運算表內各階的第 1 項式做運算，即得出新增的各階第 1 項式，而形成增 1 項完整的新運算數值表，詳情如下表列；

x ： 0 x_0 x_1 x_2 $\cdots$

y ： a_0 $\sum_{t=0}^{n}a_t x_0^{t}$ $\sum_{t=0}^{n}a_t x_1^{t}$ $\sum_{t=0}^{n}a_t x_2^{t}$ $\cdots$

1 階： $\sum_{t=1}^{n}a_t x_0^{t-1}$ $\sum_{t=1}^{n}a_t(\sum_{i=0}^{t-1}x_0^{t-1-i}x_1^{i})$ $\sum_{t=1}^{n}a_t(\sum_{i=0}^{t-1}x_1^{t-1-i}x_2^{i})$ $\cdots$

2 階： $\sum_{t=2}^{n}a_t(\sum_{i=0}^{t-2}x_0^{t-2-i}x_1^{i})$ $\sum_{t=2}^{n}a_t(\sum_{i+j+k=t-2}x_0^{i}x_1^{j}x_2^{k})$ $\cdots$

3 階： $\sum_{t=3}^{n}a_t(\sum_{i+j+k=t-3}x_0^{i}x_1^{j}x_2^{k})$ $\sum_{t=3}^{n}a_t(\sum_{i+j+k+l=t-3}x_0^{i}x_1^{j}x_2^{k}x_3^{l})$ $\cdots$

4 階： $\sum_{t=4}^{n}a_t(\sum_{i+j+k+l=t-4}x_0^{i}x_1^{j}x_2^{k}x_3^{l})$

$\sum_{t=4}^{n}a_t(\sum_{i+j+k+l+m=t-4}x_0^{i}x_1^{j}x_2^{k}x_3^{l}x_4^{m})$ $\cdots$

5 階： $\sum_{t=5}^{n} a_t (\sum_{i+j+k+l+m=t-5} x_0{}^i x_1{}^j x_2{}^k x_3{}^l x_4{}^m)$

$\sum_{t=5}^{n} a_t (\sum_{i+j+k+l+m+p=t-5} x_0{}^i x_1{}^j x_2{}^k x_3{}^l x_4{}^m x_5{}^p)$ $\cdots$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

$n-3$： $a_n \sum_{i=0}^{n-4} x_i (\sum_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-4}=2} x_0{}^{k_0} x_1{}^{k_1} x_2{}^{k_2} \cdots x_{n-4}{}^{k_{n-4}}) + a_{n-1} (\sum_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-4}=2} x_0{}^{k_0} x_1{}^{k_1} x_2{}^{k_2} \cdots x_{n-4}{}^{k_{n-4}})$

$+ a_{n-2} (\sum_{i=0}^{n-4} x_i) + a_{n-3}$

$a_n \sum_{i=0}^{n-3} x_i (\sum_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-3}=2} x_0{}^{k_0} x_1{}^{k_1} x_2{}^{k_2} \cdots x_{n-3}{}^{k_{n-3}}) + a_{n-1} (\sum_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-3}=2} x_0{}^{k_0} x_1{}^{k_1} x_2{}^{k_2} \cdots x_{n-3}{}^{k_{n-3}})$

$+ a_{n-2} (\sum_{i=0}^{n-3} x_i) + a_{n-3}$ $\cdots$

$n-2$ 階： $a_n (\sum_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-3}=2} x_0{}^{k_0} x_1{}^{k_1} x_2{}^{k_2} \cdots x_{n-3}{}^{k_{n-3}}) + a_{n-1} (\sum_{i=0}^{n-3} x_i) + a_{n-2}$

$a_n (\sum_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-2}=2} x_0{}^{k_0} x_1{}^{k_1} x_2{}^{k_2} \cdots x_{n-2}{}^{k_{n-2}}) + a_{n-1} (\sum_{i=0}^{n-2} x_i) + a_{n-2}$ $\cdots$

$n-1$ 階： $a_n (\sum_{i=0}^{n-2} x_i) + a_{n-1}$ $a_n (\sum_{i=0}^{n-1} x_i) + a_{n-1}$ $\cdots$

n 階： a_n a_n

注意到最末階是常數 a_n，以上操作即完成了新增 0 數據點的新原型均差運算表。

B3. 新作降 1 次數的 $p_1 = p_1(x) = \sum_{t=1}^{n} a_t x^{t-1}$ 多項式函數的均差運算表，如下；

x： 0 x_0 x_1 x_2 $\cdots$

p_1： a_1　$\sum_{t=1}^{n} a_t {x_0}^{t-1}$　$\sum_{t=1}^{n} a_t {x_1}^{t-1}$　$\sum_{t=1}^{n} a_t {x_2}^{t-1}$　$\cdots$

1 階：　$\sum_{t=2}^{n} a_t {x_0}^{t-2}$　$\sum_{t=2}^{n} a_t (\sum_{i=0}^{t-2} {x_0}^{t-2-i} {x_1}^{i})$　$\sum_{t=2}^{n} a_t (\sum_{i=0}^{t-2} {x_1}^{t-2-i} {x_2}^{i})$　$\cdots$

2 階：　$\sum_{t=3}^{n} a_t (\sum_{i=0}^{t-3} {x_0}^{t-3-i} {x_1}^{i})$　$\sum_{t=3}^{n} a_t (\sum_{i+j+k=t-3} {x_0}^{i} {x_1}^{j} {x_2}^{k})$　$\cdots$

3 階：　$\sum_{t=4}^{n} a_t (\sum_{i+j+k=t-4} {x_0}^{i} {x_1}^{j} {x_2}^{k})$　$\sum_{t=4}^{n} a_t (\sum_{i+j+k+l=t-4} {x_0}^{i} {x_1}^{j} {x_2}^{k} {x_3}^{l})$　$\cdots$

$\vdots$　$\vdots$　$\vdots$

$n-3$階：　$a_n (\sum_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-4}=2} {x_0}^{k_0} {x_1}^{k_1} {x_2}^{k_2} \cdots {x_{n-4}}^{k_{n-4}}) + a_{n-1}(\sum_{i=0}^{n-4} x_i) + a_{n-2}$

$a_n (\sum_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-3}=2} {x_0}^{k_0} {x_1}^{k_1} {x_2}^{k_2} \cdots {x_{n-3}}^{k_{n-3}}) + a_{n-1}(\sum_{i=0}^{n-3} x_i) + a_{n-2}$　$\cdots$

$n-2$階：　$a_n (\sum_{i=0}^{n-3} x_i) + a_{n-1}$　$a_n (\sum_{i=0}^{n-2} x_i) + a_{n-1}$　$\cdots$

$n-1$階：　a_n　a_n

B4. 新作降 2 次數的 $p_2 = p_2(x) = \sum_{t=2}^{n} a_t x^{t-2}$ 多項式函數的均差運算表，如下；

x： 0　x_0　x_1　x_2　$\cdots$

p_2： a_2　$\sum_{t=2}^{n} a_t {x_0}^{t-2}$　$\sum_{t=2}^{n} a_t {x_1}^{t-2}$　$\sum_{t=2}^{n} a_t {x_2}^{t-2}$　$\cdots$

1 階：　$\sum_{t=3}^{n} a_t {x_0}^{t-3}$　$\sum_{t=3}^{n} a_t (\sum_{i=0}^{t-3} {x_0}^{t-3-i} {x_1}^{i})$　$\sum_{t=3}^{n} a_t (\sum_{i=0}^{t-3} {x_1}^{t-3-i} {x_2}^{i})$　$\cdots$

2 階：　$\sum_{t=4}^{n} a_t (\sum_{i=0}^{t-4} {x_0}^{t-4-i} {x_1}^{i})$　$\sum_{t=4}^{n} a_t (\sum_{i+j+k=t-4} {x_0}^{i} {x_1}^{j} {x_2}^{k})$　$\cdots$

3 階:　$\sum_{t=5}^{n} a_t (\sum_{i+j+k=t-5} {x_0}^{i} {x_1}^{j} {x_2}^{k})$　$\sum_{t=5}^{n} a_t (\sum_{i+j+k+l=t-5} {x_0}^{i} {x_1}^{j} {x_2}^{k} {x_3}^{l})$　$\cdots$

$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$

$n-4$階： $a_n(\sum_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-5}=2} {x_0}^{k_0}{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}\cdots{x_{n-5}}^{k_{n-5}}) + a_{n-1}(\sum_{i=0}^{n-5} x_i) + a_{n-2}$ $\quad a_n(\sum_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-4}=2} {x_0}^{k_0}{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}\cdots{x_{n-4}}^{k_{n-4}}) + a_{n-1}(\sum_{i=0}^{n-4} x_i) + a_{n-2}$ $\cdots$

$n-3$階： $a_n(\sum_{i=0}^{n-4} x_i) + a_{n-1}$ $\quad a_n(\sum_{i=0}^{n-3} x_i) + a_{n-1}$ $\cdots$

$n-2$階： a_n $\quad a_n$

B5. 持續新作降 3 次數的 $p_3 = p_3(x) = \sum_{t=3}^{n} a_t x^{t-3}$ 多項式函數的均差運算表；

x： $0 \quad x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \cdots$

p_3： $a_3 \quad \sum_{t=3}^{n} a_t {x_0}^{t-3} \quad \sum_{t=3}^{n} a_t {x_1}^{t-3} \quad \sum_{t=3}^{n} a_t {x_2}^{t-3} \quad \cdots$

1 階： $\sum_{t=4}^{n} a_t {x_0}^{t-4} \quad \sum_{t=4}^{n} a_t (\sum_{i=0}^{t-4} {x_0}^{t-4-i}{x_1}^{i}) \quad \sum_{t=4}^{n} a_t (\sum_{i=0}^{t-4} {x_1}^{t-4-i}{x_2}^{i}) \quad \cdots$

2 階： $\sum_{t=5}^{n} a_t (\sum_{i=0}^{t-5} {x_0}^{t-5-i}{x_1}^{i}) \quad \sum_{t=5}^{n} a_t (\sum_{i+j+k=t-5} {x_0}^{i}{x_1}^{j}{x_2}^{k}) \quad \cdots$

3 階： $\sum_{t=6}^{n} a_t (\sum_{i+j+k=t-6} {x_0}^{i}{x_1}^{j}{x_2}^{k}) \quad \sum_{t=6}^{n} a_t (\sum_{i+j+k+l=t-6} {x_0}^{i}{x_1}^{j}{x_2}^{k}{x_3}^{l}) \quad \cdots$

$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$

$n-4$階： $a_n(\sum_{i=0}^{n-5} x_i) + a_{n-1}$ $\quad a_n(\sum_{i=0}^{n-4} x_i) + a_{n-1}$ $\cdots$

$n-3$階： a_n $\quad a_n$

B6. 持續作降 4 次數、降 5 次數、⋯、直到降 $n-3$次數的 $p_{n-3} = \sum_{t=0}^{3} a_{t+n-3} x^t$ ；

x：　0　x_0　x_1　x_2　$\cdots$

p_{n-3}：　a_{n-3}　$\sum_{t=0}^{3} a_{t+n-3} x_0^{\ t}$　$\sum_{t=0}^{3} a_{t+n-3} x_1^{\ t}$　$\sum_{t=0}^{3} a_{t+n-3} x_2^{\ t}$　$\cdots$

1 階：　$\sum_{t=0}^{2} a_{t+n-2} x_0^{\ t}$　$\sum_{t=0}^{2} a_{t+n-2} (\sum_{i=0}^{t} x_0^{\ t-i} x_1^{\ i})$　$\sum_{t=0}^{2} a_{t+n-2} (\sum_{i=0}^{t} x_1^{\ t-i} x_2^{\ i})$　$\cdots$

2 階：　$a_n (\sum_{i=0}^{1} x_i) + a_{n-1}$　$a_n (\sum_{i=0}^{2} x_i) + a_{n-1}$　$\cdots$

3 階：　a_n　a_n

B7. 持續作降 $n-2$ 次數的 $p_{n-2} = \sum_{t=0}^{2} a_{t+n-2} x^t$ 多項式函數均差運算表；

x：　0　x_0　x_1　x_2　$\cdots$

p_{n-2}：　a_{n-2}　$\sum_{t=0}^{2} a_{t+n-2} x_0^{\ t}$　$\sum_{t=0}^{2} a_{t+n-2} x_1^{\ t}$　$\sum_{t=0}^{2} a_{t+n-2} x_2^{\ t}$　$\cdots$

1 階：　$a_n x_0 + a_{n-1}$　$a_n (\sum_{i=0}^{1} x_i) + a_{n-1}$　$a_n (\sum_{i=1}^{2} x_i) + a_{n-1}$　$\cdots$

2 階：　a_n　a_n　$\cdots$

B8. 最終再作出降 $n-1$ 次數的 $p_{n-1} = a_n x + a_{n-1}$ 多項式函數均差運算表；

x：　0　x_0　x_1　x_2　$\cdots$

p_{n-1}：　a_{n-1}　$a_n x_0 + a_{n-1}$　$a_n x_1 + a_{n-1}$　$a_n x_2 + a_{n-1}$　$\cdots$

1 階：　a_n　a_n　a_n　$\cdots$

從上述 B2 節、B3 節、⋯至 B8 節新作完成的所有均差運算表中可清楚地看見此多項式函數的所有係數 a_0、a_1、a_2、a_3、⋯、a_{n-2}、a_{n-1}、a_n 皆完整無缺地呈現在各表列中的第 1 項位置。直接取出這些數值就得到完整正確的多項式函數！

接著即敘述如何應用**逆推均差運算列表法直取多項式函數**的標準操作流程。

C. **以逆推均差運算列表法直取多項式函數**

在比對上述各表列中的各位置數值發現連續兩份表格之間存在有完全相同的規律數字，取出這些相同的規律數字在各降次數表格中的對應位置作適當的配置排列，再應用逆推均差運算列表法即可找到各對應的係數。各表列中的最後一列必都是呈現出首項的係數。請看下列逆推均差運算的演繹理論過程；

C1. 逆推均差運算演繹理論：

在 B2 節裡新增 0 數據點的新原型均差運算表中最末 n 階的常數值是 a_n，自此出發逐步作反向均差運算推演而得出各階的第 1 項數值直到計算出 a_0 常數項。

[1] 因 a_n 值是 n 階運算出的結果，由表格對應位置知 $[a_0, y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}] = a_n$，以此

萌芽種子開始出發作反向均差運算推演；由均差運算知

n 階： $[a_0, y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}] = a_n = \dfrac{[y_0, y_1, y_2, y_3, \cdots, y_{n-1}] - [a_0, y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-2}]}{x_{n-1} - 0}$

$\Rightarrow [y_0, y_1, y_2, y_3, \cdots, y_{n-1}] - [a_0, y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-2}] = a_n(x_{n-1} - 0)$ ，將 $a_n(x_{n-1} - 0)$

配形成兩運算式的差，因為到了 n 階時每個 x_i 都僅剩一次數的項 $a_n x_i$，所以將

$a_n(x_{n-1} - 0)$ 配成 $a_n[(x_{n-1} + x_{n-2} + \cdots + x_0) - (x_{n-2} + x_{n-3} + \cdots + 0)]$ $\Rightarrow$

$[y_0, y_1, y_2, y_3, \cdots, y_{n-1}] - [a_0, y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-2}] = a_n(x_{n-1} - 0)$

$= a_n(x_{n-1} + x_{n-2} + \cdots + x_0) - a_n(x_{n-2} + x_{n-3} + \cdots + 0)$

比對相對應位置後，得 $[y_0, y_1, y_2, y_3, \cdots, y_{n-1}] = a_n(x_{n-1} + x_{n-2} + \cdots + x_0) + a_{n-1}$

與 $[a_0, y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-2}] = a_n(x_{n-2} + x_{n-3} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) + a_{n-1}$

這樣就完成了第 1 次逆推而得到 B2.節運算表中 $n-1$ 階的第 1 項數值。

[2] 同理，再由 $[y_0, y_1, y_2, y_3, \cdots, y_{n-2}] - [a_0, y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-3}] = (x_{n-2} - 0) \times$

$[a_n(x_{n-2} + x_{n-3} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) + a_{n-1}] = a_n x_{n-2}(x_{n-2} + x_{n-3} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) + a_{n-1}$

$(x_{n-2} - 0) = a_n \{ x_{n-2}(x_{n-2} + x_{n-3} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) + [x_{n-3}(x_{n-3} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) +$

$x_{n-4}(x_{n-4} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) + \cdots + x_2(x_2 + x_1 + x_0 + 0) + x_1(x_1 + x_0 + 0) + {x_0}^2] -$

$[x_{n-3}(x_{n-3} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) + x_{n-4}(x_{n-4} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) + \cdots + x_1(x_1 + x_0 + 0) + {x_0}^2]\}$

$+ a_{n-1}[(x_{n-2} + x_{n-3} + \cdots + x_0) - (x_{n-3} + x_{n-4} + \cdots + 0)] \quad \Rightarrow$

$[a_0, y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-3}] = a_n [x_{n-3}(x_{n-3} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) +$

$x_{n-4}(x_{n-4} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) + \cdots + x_1(x_1 + x_0 + 0) + {x_0}^2] + a_{n-1}$

$(x_{n-3} + x_{n-4} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) + a_{n-2}$

$$= a_n\left(\sum_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-3}=2} {x_0}^{k_0} {x_1}^{k_1} {x_2}^{k_2} \cdots {x_{n-3}}^{k_{n-3}}\right) + a_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-3} x_i\right) +$$

這樣又完成了第 2 次逆推而得到 B2.節運算表中 $n-2$ 階的第 1 項數值。

[3] 同樣，繼續經由 $[y_0, y_1, y_2, y_3, \cdots, y_{n-3}] - [a_0, y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-4}] = (x_{n-3} - 0) \times$

$[a_0, y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-3}] = a_n x_{n-3} [x_{n-3}(x_{n-3} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) +$

$x_{n-4}(x_{n-4} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) + \cdots + x_1(x_1 + x_0 + 0) + {x_0}^2]$

$+ a_{n-1} x_{n-3}(x_{n-3} + x_{n-4} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) + a_{n-2}(x_{n-3} - 0)$

$= a_n \{ x_{n-3} [x_{n-3}(x_{n-3} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) + x_{n-4}(x_{n-4} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) + \cdots +$

$x_1(x_1 + x_0 + 0) + x_0^{\ 2}] + x_{n-4}[x_{n-4}(x_{n-4} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) + x_{n-5}(x_{n-5} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) +$

$\cdots + x_1(x_1 + x_0 + 0) + x_0^{\ 2}] + \cdots + x_2[x_2(x_2 + x_1 + x_0 + 0) + x_1(x_1 + x_0 + 0) + x_0^{\ 2}] +$

$x_1[x_1(x_1 + x_0 + 0) + x_0^{\ 2}] + x_0^{\ 3} - x_{n-4} [x_{n-4}(x_{n-4} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) +$

$x_{n-5}(x_{n-5} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) + \cdots + x_1(x_1 + x_0 + 0) + x_0^{\ 2}] - \cdots - x_2[x_2(x_2 + x_1 + x_0 + 0) +$

$x_1(x_1 + x_0 + 0) + x_0^{\ 2}] - x_1[x_1(x_1 + x_0 + 0) + x_0^{\ 2}] - x_0^{\ 3} \} + a_{n-1} \{ x_{n-3}$

$(x_{n-3} + x_{n-4} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) + [x_{n-4}(x_{n-4} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) +$

$x_{n-5}(x_{n-5} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) + \cdots + x_2(x_2 + x_1 + x_0 + 0) + x_1(x_1 + x_0 + 0) + x_0^{\ 2}] -$

$[x_{n-4}(x_{n-4} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) + x_{n-5}(x_{n-5} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) + \cdots + x_1(x_1 + x_0 + 0) + x_0^{\ 2}]\}$

$+ a_{n-2}[(x_{n-3} + x_{n-4} + \cdots + x_0) - (x_{n-4} + x_{n-5} + \cdots + x_0 + 0)] \quad \Rightarrow [a_0, y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-4}]$

$= a_n \{ x_{n-4} [x_{n-4}(x_{n-4} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) + x_{n-5}(x_{n-5} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) + \cdots +$

$x_1(x_1 + x_0 + 0) + x_0^{\ 2}] + \cdots + x_2[x_2(x_2 + x_1 + x_0 + 0) + x_1(x_1 + x_0 + 0) + x_0^{\ 2}] +$

$x_1[x_1(x_1 + x_0 + 0) + x_0^{\ 2}] + x_0^{\ 3} \} + a_{n-1} [x_{n-4}(x_{n-4} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) +$

$x_{n-5}(x_{n-5} + \cdots + x_1 + x_0 + 0) + \cdots + x_1(x_1 + x_0 + 0) + x_0^{\ 2}]$

$+ a_{n-2}(x_{n-4} + x_{n-5} + \cdots + x_0 + 0) + a_{n-3}$

$$= a_n \sum_{i=0}^{n-4} x_i \Big(\sum_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-4}=2} x_0^{k_0} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{n-4}^{k_{n-4}} \Big) + a_{n-1} \Big(\sum_{k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-4}=2} x_0^{k_0} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{n-4}^{k_{n-4}} \Big) +$$

$$a_{n-2} \Big(\sum_{i=0}^{n-4} x_i \Big) + a_{n-3}$$

上述過程再完成了第 3 次逆推而得到 B2.節運算表中 $n-3$ 階的第 1 項數值。

[4] 持續上述相同的逆推均差運算演繹歷程，逐步演算出 $n-4$ 階、$n-5$ 階、$n-6$ 階、⋯、2 階、1 階、0 階直到常數項的數值出現為止，就得到完整的多項式。

當運算到 2 階時：　由　$[a_0, y_0, y_1, y_2] = \dfrac{[y_0, y_1, y_2] - [a_0, y_0, y_1]}{x_2 - 0}$　$\Rightarrow$

$$[y_0, y_1, y_2] - [a_0, y_0, y_1] = (x_2 - 0)\,[a_0, y_0, y_1, y_2]$$

$$= (x_2 - 0) \times \sum_{t=3}^{n} a_t \Big(\sum_{i+j+k=t-3} x_0^{\,i} x_1^{\,j} x_2^{\,k} \Big) = \sum_{t=3}^{n} a_t \Big(\sum_{i+j+k=t-3} x_0^{\,i} x_1^{\,j} x_2^{\,k+1} \Big)$$

$$= \sum_{t=2}^{n} a_t \Big(\sum_{i+j+k=t-2} x_0^{\,i} x_1^{\,j} x_2^{\,k} \Big) - \sum_{t=2}^{n} a_t \Big(\sum_{i=0}^{t-2} x_0^{\,t-2-i} x_1^{\,i} \Big) \quad \Rightarrow$$

$$[a_0, y_0, y_1] = \sum_{t=2}^{n} a_t \Big(\sum_{i=0}^{t-2} x_0^{\,t-2-i} x_1^{\,i} \Big)$$

1 階時：　由運算式　$[a_0, y_0, y_1] = \dfrac{[y_0, y_1] - [a_0, y_0]}{x_1 - 0}$　$\Rightarrow$

$$[y_0, y_1] - [a_0, y_0] = (x_1 - 0)\,[a_0, y_0, y_1] = (x_1 - 0) \times \sum_{t=2}^{n} a_t \Big(\sum_{i=0}^{t-2} x_0^{\,t-2-i} x_1^{\,i} \Big)$$

$$= \sum_{t=1}^{n} a_t \Big(\sum_{i=0}^{t-1} x_0^{\,t-1-i} x_1^{\,i} \Big) - \sum_{t=1}^{n} a_t x_0^{\,t-1} \quad \Rightarrow \quad [a_0, y_0] = \sum_{t=1}^{n} a_t x_0^{\,t-1}$$

0 階時：　$y_0 - ? = (x_0 - 0)[a_0, y_0] = (x_0 - 0) \times \sum_{t=1}^{n} a_t x_0^{\,t-1} = \Big(\sum_{t=1}^{n} a_t x_0^{\,t} \Big)$

$$= \Big(\sum_{t=0}^{n} a_t x_0^{\,t} \Big) - a_0 = \Big(\sum_{t=0}^{n} a_t x_0^{\,t} \Big) - \Big(\sum_{t=0}^{n} a_t \cdot 0^t \Big) \quad \Rightarrow$$

$y_0 = f(x_0) = \sum_{t=0}^{n} a_t x_0^{\,t}$　與　$? = a_0 = f(0) = \sum_{t=0}^{n} a_t \cdot 0^t$　，同理，還可得到；

$$y_1 = f(x_1) = \sum_{t=0}^{n} a_t x_1^{\,t} \,,\quad \cdots \,,\quad y_k = f(x_k) = \sum_{t=0}^{n} a_t x_k^{\,t} \,,\quad 0 \le k \le n \,,\quad k \in N$$

，因此完成了 n 次逆推配型運算而得到完整的多項式； $y = f(x) = \sum_{t=0}^{n} a_t x^t$ 。

在這逆推過程中最主要關鍵是：每一個由 a_i 係數引導的代數式皆必須被配型成兩組有規律次序又互為對稱的同次數項式，而得證出任一階運算的第 1 項數值。然而，實際的演算僅須透過數字計算的逆推均差運算列表法即可快速達成。下列將詳盡解說應用逆推均差運算列表法直取多項式函數的標準運算作業流程；

C2. 以逆推均差運算列表法直取多項式函數

[1] 先做出原型均差運算表：實際演算情形解說如后；已知數據點：(-3, -8) , (-1,-2) , (1, -4) , (2, -8) , (4,188) ,(5, 544) , (8, 53980) 等 7 個數據，而滿足這些平面直角坐標點的多項式函數為 $y = f(x) = x^6 - 8x^5 + 5x^4 + 83x^3 - 133x^2 - 76x + 124$，證明：

(a) 現在先根據此 7 個坐標點計算編製出完整的橫式原型均差運算表於下；

x：	−3		−1		1		2		4		5		8
y：	−8		−2		−4		−8		188		544		53980
1 階：		3		−1		−4		98		356		17812	
2 階：			−1		−1		34		86		4364		
3 階：				0		7		13		713			
4 階：					1		1		100				
5 階：						0		11					
6 階：							1						

(b) 上述列表中沒有(0, ?)點，為了要取到常數項值，所以新增一個數據點(0,?)；新增後仍然必要維持原來的多項式函數不變，僅需要將原型的均差運算表內最末一列 n 階的數字填加於此新增的 0 數據點的最末一列。完成後再以追溯均差運算法分別就各階運算自最末列逆向逐一配型成較高一次數的多項函式數值如下；

x：　0　−3　−1　1　2　4　5　8

y：	?		−8		−2		−4		−8		188		544		53980
1 階：		?		3		−1		−4		98		356		17812	
2 階：			?		−1		−1		34		86		4364		
3 階：				?		0		7		13		713			
4 階：					?		1		1		100				
5 階：						?		0		11					
6 階：							1		1						

⇓　　　⇓　　　⇓

x：	0		−3		−1		1		2		4		5		8
y：	?		−8		−2		−4		−8		188		544		53980
1 階：		?		3		−1		−4		98		356		17812	
2 階：			?		−1		−1		34		86		4364		
3 階：				?		0		7		13		713			
4 階：					?		1		1		100				
5 階：						−5		0		11					
6 階：							1		1						

⇓　　　⇓　　　⇓

x：	0		−3		−1		1		2		4		5		8
y：	124		−8		−2		−4		−8		188		544		53980
1 階：		44		3		−1		−4		98		356		17812	
2 階：			41		−1		−1		34		86		4364		
3 階：				−42		0		7		13		713			
4 階：					21		1		1		100				
5 階：						−5		0		11					
6 階：							1		1						

這樣就完成了新增 0 數據點的新原型均差運算表並抓到常數項值 $a_0=124$ 。

【待續】